

6 CARTOGRAFIA

6.1 PREMESSA

La *cartografia* è la rappresentazione su carta, cioè su supporto bidimensionale, di una porzione di territorio o di un oggetto preventivamente rilevato con tecniche topografiche e/o fotogrammetriche.

Più in generale, può essere definita come una rappresentazione della superficie terrestre sul piano, realizzata stabilendo una corrispondenza biunivoca fra le coordinate curvilinee degli elementi rilevati sulla superficie di riferimento e le coordinate cartesiane riferite ad un sistema di assi sul piano della carta.

Tale corrispondenza si attua attraverso le *equazioni di rappresentazione*:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (6.1)$$

Se la zona interessata dal rilievo e di cui si vuole realizzare una rappresentazione cartografica è sufficientemente ristretta, tale da essere compresa nel campo topografico, la superficie di riferimento per il rilievo planimetrico è il piano tangente all'ellissoide nel punto stesso. La rappresentazione cartografica è in questo caso immediata giacché le equazioni della carta si limiteranno ad una semplice similitudine fra figure tracciate sul piano di riferimento e le corrispondenti sul piano della carta in opportuna scala (costante).

Quando, invece, la zona interessata ha estensione tale da dover assumere come superficie di riferimento la sfera locale o l'ellissoide, il problema della rappresentazione cartografica deve essere risolto in maniera diversa. La soluzione ideale sarebbe quella di una rappresentazione in cui tutte le figure tracciate sull'ellissoide abbiano come corrispondenti sul piano della carta delle

figure simili, costituendo il rapporto di similitudine costante per tutta la superficie. Tale soluzione è, tuttavia, impossibile in quanto sia l'ellissoide terrestre che la sfera locale non sono superfici applicabili al piano.

Qualsiasi rappresentazione dell'ellissoide sul piano è, pertanto, deformata e si possono realizzare infinite rappresentazioni in relazione agli infiniti tipi (qualitativi e quantitativi) di deformazioni indotte.

Per realizzare una rappresentazione cartografica occorre definire le equazioni della carta (6.1) che stabiliscono una corrispondenza biunivoca e continua tra le coordinate cartesiane sul piano della carta e le coordinate curvilinee (generalmente geografiche) sulla superficie dell'ellissoide.

L'unica condizione che le equazioni devono soddisfare è quella di essere invertibili ad un solo valore e derivabili; pertanto, sono infinite le funzioni che possono essere scelte per stabilire la rappresentazione e, di conseguenza, infinite sono anche le carte possibili.

È evidente che, scegliendo ad arbitrio le funzioni x ed y si ottengono, in generale, delle rappresentazioni cartografiche che deformano fortemente le figure ellissoidiche e che, quindi, non rivestono nessun interesse applicativo. Si scelgono, pertanto, le rappresentazioni cartografiche che comportano deformazioni accettabili.

In base a tali scelte si può decidere il tipo di rappresentazione cartografica da adottare:

- si può imporre, ad esempio, che l'angolo tra due linee uscenti da un punto della superficie da rappresentare si mantenga invariato nella rappresentazione cartografica, si parlerà in tal caso di *rappresentazioni conformi o isogoniche*;

- se si vuole mantenere inalterato il rapporto tra le aree di figure infinitesime corrispondenti, si parlerà, invece, di *rappresentazioni equivalenti*;
- infine, se si vuole mantenere inalterato il rapporto tra le distanze infinitesime corrispondenti, si parlerà di *rappresentazioni equidistanti*;
- si può in alternativa rinunciare ad imporre la perfetta conservazione degli elementi angolari (rappresentazioni conformi), superficiali (rappresentazioni equivalenti) o lineari (rappresentazioni equidistanti), ma cercare di mantenere in limiti accettabili tutte le deformazioni, si parla in tal caso di *rappresentazioni afilattiche*.

È necessario, tuttavia, sottolineare che è impossibile avere una rappresentazione dell'ellissoide sul piano che sia contemporaneamente conforme ed equivalente o conforme ed equidistante, senza indurre deformazioni nelle figure rappresentate sulla carta.

Molti dei sistemi di rappresentazione cartografica più frequentemente usati, possono ottenersi con vere e proprie costruzioni geometriche che consentono di passare da un punto della superficie ellissoidica, o sferica, al corrispondente punto del piano. Una volta ottenuta per via geometrica la rappresentazione dei punti dell'ellissoide su di un piano, si realizza la carta, alla scala voluta, semplicemente adottando un opportuno rapporto di similitudine.

Le rappresentazioni possono classificarsi in due tipi:

- *proiezioni prospettiche*, quando si proiettano i punti dell'ellissoide sul piano cartografico da un punto di vista chiamato centro di proiezione;
- *proiezioni per sviluppo*, considerando un cono o un cilindro, tangente o secante alla superficie matematica della Terra, su questo si proiettano i punti dell'ellissoide generalmente dal suo centro, oppure da un punto all'infinito in direzione normale alla linea di tangenza o di secanza; a

seconda di com'è disposto l'asse dell'ellissoide rispetto all'asse del cilindro o del cono, si hanno proiezioni per sviluppo: *dirette* (se i due assi sono coincidenti), *inverse* (se ortogonali), *transverse* (se formano un angolo compreso tra 0° e 90°).

L'aspetto geometrico delle rappresentazioni cartografiche ha, tuttavia, un interesse limitato in quanto il loro studio deve essere per lo più affrontato solo per via analitica, determinando le formule di passaggio tra le coordinate curvilinee sulla superficie da rappresentare e le coordinate cartesiane sul piano della carta.

Dalla trasformazione della rappresentazione dell'ellissoide sul piano, realizzata per via numerica, si perviene alla rappresentazione grafica sulla carta, mediante un fattore di riduzione delle lunghezze lineari, n (*scala della carta*).

6.1.1 Proiezioni prospettiche

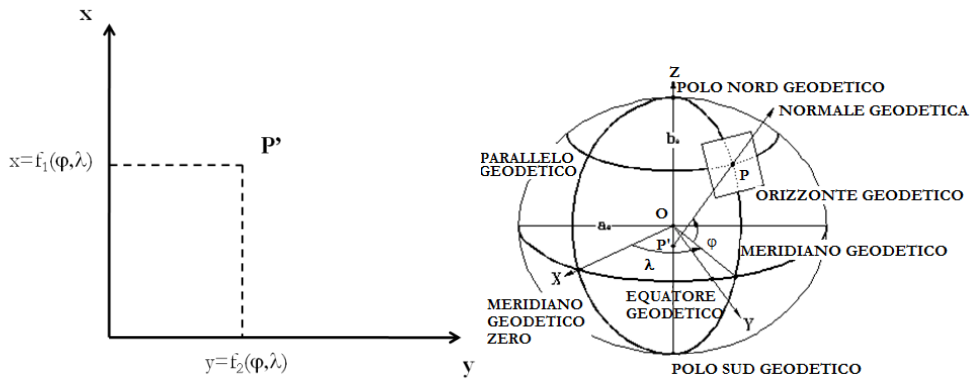


Figura 6.1 - Coordinate cartesiane e geografiche

Per rappresentare una superficie, che si sviluppa nello spazio, o un oggetto tridimensionale su di un piano cartografico (fig. 6.1) devono essere note le

formule di corrispondenza tra le coordinate spaziali di un generico punto $P(\varphi, \lambda)$ e le coordinate cartografiche (x, y) dello stesso:

$$\begin{cases} x = f_1(\varphi, \lambda) \\ y = f_2(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

Ricordiamo che la proiezione di un generico oggetto da un punto C (centro di proiezione) su un piano è individuato dall'insieme dei punti di intersezione tra il piano di proiezione con le rette del fascio di centro C, passanti per l'insieme dei punti costituenti l'oggetto stesso. Nel caso della proiezione di porzioni di superficie su carta, a seconda di come si dispone il piano di rappresentazione rispetto al globo (tangente al polo, all'equatore, o ad un generico parallelo) e al suo centro di proiezione, si avranno diverse *proiezioni prospettiche pure* (fig. 6.2):

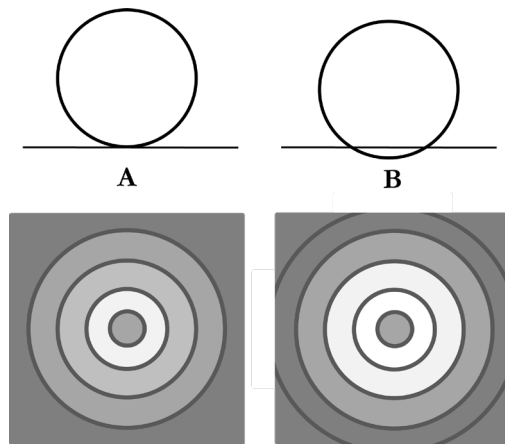


Figura 6.2 - Proiezioni prospettiche pure

- *ortografica*, il punto di proiezione è all'infinito;
- *scenografica*, il punto di proiezione appartiene all'asse terrestre;
- *stereografica*, il centro di proiezione è situato sul polo opposto rispetto alla posizione del piano tangente;

- *gnomonica*, proiezione della superficie dal centro del piano.

6.1.2 Proiezioni cilindriche

La proiezione avviene su di un cilindro tangente all'equatore (diretta) o su di un cilindro tangente lungo un meridiano (inversa) (fig. 6.3), proiettando ogni punto o dal centro della sfera o dal centro del parallelo passante per il punto.

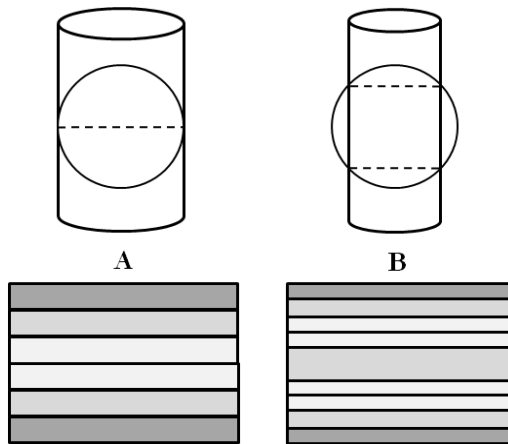


Figura 6.3 - Proiezioni cilindriche

Successivamente, il cilindro che ha curvatura totale nulla, tagliato lungo una generatrice, è sviluppato sul piano. Le deformazioni sono contenute solo a cavallo della linea di tangenza, per ridurle ai margini della zona interessata si possono usare proiezioni policilindriche o cilindri secanti.

6.1.3 Proiezioni coniche

La proiezione avviene su di un cono tangente lungo il parallelo alla latitudine media della fascia da rappresentare o secante (fig. 6.4), con centro di proiezione di ogni punto o il centro della sfera o il centro del parallelo del punto.

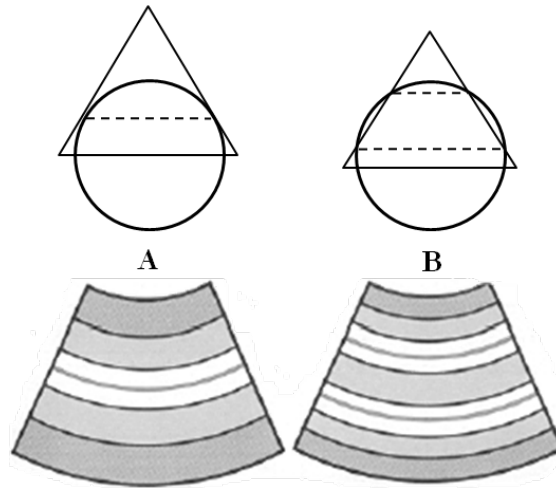


Figura 6.4 - Proiezioni coniche

6.2 LE DEFORMAZIONI

Operando una proiezione della superficie di riferimento sul piano, si introducono delle deformazioni, che possono essere:

- *deformazione lineare (m)*: preso un arco di linea PK di lunghezza l_{PK} sull'ellissoide, il suo corrispondente proiettato sul piano della carta $P'K'$, avrà lunghezza diversa dal precedente pari a $l_{P'K'}$. Il *modulo di deformazione lineare* è espresso dalla relazione $m = l_{PK}/l_{P'K'}$.
- *deformazione superficiale (M)*: presa una piccola area σ intorno al punto P sulla superficie ellissoidica, se si considera il punto P' e σ' , proiezione sul piano della carta di P e σ , si può definire il *modulo di deformazione superficiale* $M = \sigma'/\sigma$.
- *deformazione angolare (δ)*: considerato il meridiano passante per il punto P sulla superficie ellissoidica e l'angolo α formato dallo stesso e dalla direzione PK , la direzione $P'K'$, ottenuta dalla proiezione di PK sul piano della carta, formerà con il meridiano un angolo α' (diverso da α)

a causa delle deformazioni sulle lunghezze e direzioni di questi archi. Si definisce *deformazione angolare* la quantità: $\delta = \alpha' - \alpha$.

Per risolvere il problema delle rappresentazioni cartografiche si devono conoscere necessariamente le deformazioni indotte dalla particolare rappresentazione che si vuole adottare.

6.2.1 Espressione analitica dei moduli di deformazione

Le carte sono costruite in base a delle classi di rappresentazione, ciascuna delle quali riduce o elimina alcune deformazioni.

Di seguito, si definiscono analiticamente le deformazioni.

a) *modulo di deformazione lineare:*

$$m = \frac{ds_r}{ds_e} \quad (6.2)$$

dove ds_r è la distanza fra due punti sul piano della rappresentazione e ds_e la stessa distanza sull'ellissoide.

Partendo dalle equazioni di rappresentazione cartografica

$$\begin{cases} x = f(\varphi, \omega) \\ y = f(\varphi, \omega) \end{cases} \Rightarrow ds_r^2 = dx^2 + dy^2$$

differenziando il suddetto sistema si ottiene:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot d\omega \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot d\omega \end{cases} \Leftrightarrow ds_r^2 = e \cdot d\varphi^2 + 2 \cdot f \cdot d\omega \cdot d\varphi + g \cdot d\omega^2 \quad (6.3)$$

con

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega} \right)^2$$

Consideriamo ora un generico elemento definito, rispetto all'ellissoide, da due meridiani e due paralleli:

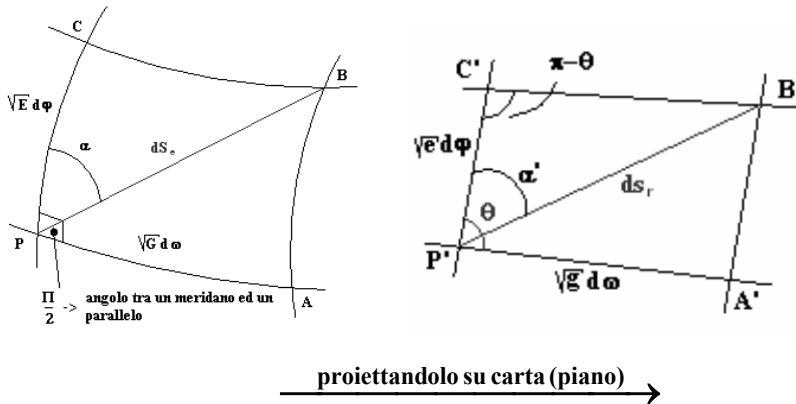


Figura 6.5 - Elemento infinitesimo ds_e e ds_r

E e G si determinano come segue:

- consideriamo una particolare sezione ellissoidica in cui indichiamo con $d\varphi$ il valore della latitudine e con ρ il raggio di curvatura del meridiano (fig. 6.6), la lunghezza dell'arco individuato dalla latitudine $d\varphi$ è pari a $\sqrt{E}d\varphi = \rho d\varphi \Rightarrow E = \rho^2$;

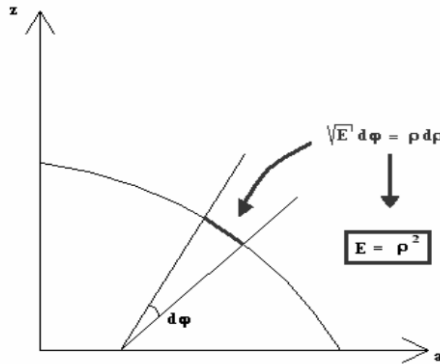


Figura 6.6 - Sezione ellissoidica

- presa una porzione di arco di parallelo compreso fra due meridiani (fig. 6.7) in cui si è indicato con $d\omega$ l'angolo al centro, r il raggio del parallelo, la lunghezza dell'arco individuato è, pertanto, $rd\omega$ e, quindi, $\sqrt{G}d\omega = rd\omega \Rightarrow G = r^2$.

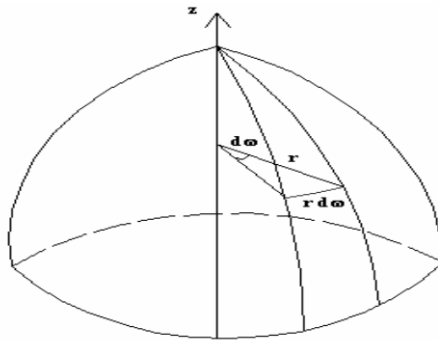


Figura 6.7 - Porzione di arco di parallelo

Attraverso le formule di corrispondenza in funzione della particolare rappresentazione è possibile scrivere:

$$ds_e^2 = (\sqrt{E}d\varphi)^2 + (\sqrt{G}d\omega)^2 = Ed\varphi^2 + Gd\omega^2 = \rho^2d\varphi^2 + r^2d\omega^2 \quad (6.4)$$

Sostituendo le (6.3)-(6.4) nella (6.2) si ottiene:

$$m^2 = \frac{ds_r^2}{ds_e^2} = \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\omega + gd\omega^2}{Ed\varphi^2 + Gd\omega^2}.$$

Dividendo per $d\varphi^2$ e raccogliendo in E :

$$m^2 = \frac{e + 2f \frac{d\omega}{d\varphi} + g \left(\frac{d\omega}{d\varphi} \right)^2}{E \left[1 + \frac{G}{E} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} \right)^2 \right]} \quad (6.5)$$

in cui è possibile esprimere:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \sqrt{\frac{E}{G}} \tan \alpha = \tan \alpha \frac{\rho}{r}$$

Inoltre, è facile verificare che:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Sostituendo quanto precedentemente scritto nella (6.5) si ottiene:

$$m^2 = \frac{e}{E} \cos^2 \alpha + \frac{2f}{\sqrt{EG}} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{g}{G} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

dove e, f, g rappresentano le derivate parziali di x ed y nelle formule di corrispondenza in funzione delle coordinate geografiche.

Il modulo di deformazione lineare è calcolabile solo per elementi infinitesimi; non è possibile, infatti, calcolarlo per elementi finiti in quanto si utilizza la geometria differenziale per definire la superficie.

b) *modulo di deformazione superficiale*

$$M = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e}$$

dove $d\sigma_r$ e $d\sigma_e$ rappresentano, rispettivamente, le aree infinitesime degli elementi sulla rappresentazione cartografica e sull'ellissoide.

Per $\varphi = cost$ è possibile scrivere:

$$\overline{PC} = \sqrt{Ed}\varphi = \rho d\varphi,$$

$$\overline{PA} = \sqrt{Gd}\omega = rd\omega$$

L'area dell'elemento ellissoidico infinitesimo sarà data da:

$$d\sigma_e = \sqrt{EG}d\omega d\varphi = \rho rd\omega d\varphi$$

Per definire l'area nella rappresentazione piana non si può prescindere dalla conoscenza di ϑ (diverso da 90°), pertanto, si ha:

$$d\sigma_r = \sqrt{g}d\omega \cdot \sqrt{e}d\varphi \cdot \text{sen}\vartheta \quad (6.6)$$

Per conoscere ϑ in funzione degli altri elementi proiettati si applica il teorema di Carnot al triangolo $P'C'B'$:

$$ds_r^2 = ed\varphi^2 + gd\omega^2 - 2\sqrt{eg}d\omega d\varphi \cdot \cos(180 - \vartheta) = ed\varphi^2 + gd\omega^2 + 2\sqrt{eg}d\omega d\varphi \cdot \cos\vartheta$$

Eguagliando la suddetta espressione con la (6.3), si ottiene il valore di ϑ attraverso:

$$\cos\vartheta = \frac{f}{\sqrt{eg}} \Rightarrow \text{sen}\vartheta = \sqrt{\frac{eg - f^2}{eg}}$$

Sostituendo il valore del seno così trovato nella (6.6) si ottiene:

$$d\sigma_r = \sqrt{eg - f^2} d\varphi d\omega$$

pertanto, si ha:

$$M = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_s} = \frac{\sqrt{eg - f^2} d\varphi d\omega}{\sqrt{EG}d\varphi d\omega} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{eg - f^2}{EG}} = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{r\rho}$$

Poiché m e M dipendono dalla latitudine e dalla longitudine, variano da punto a punto.

c) *deformazione angolare*

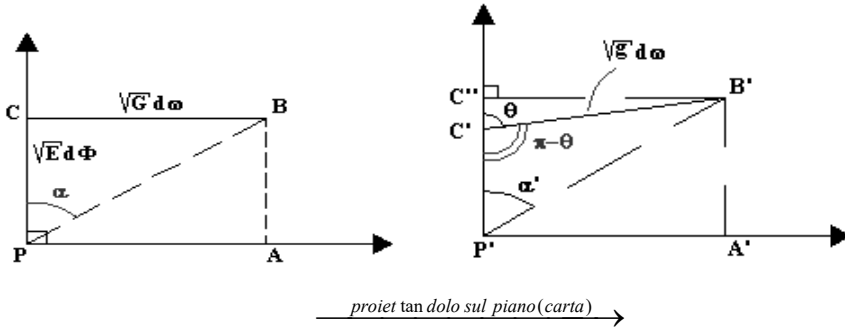


Figura 6.8 - Elemento infinitesimo

Indicando con α l'azimut sulla superficie ellissoidica per $\varphi = cost$ si ha:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{G} d\omega}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{r d\omega}{\rho d\varphi} \quad (6.7)$$

Per definire l'angolo α' sulla superficie cartografica si considera il triangolo $P'B'BC'$ in cui:

$$\begin{cases} \overline{P'C'} = \sqrt{e} d\varphi \\ \overline{B'C'} = \sqrt{g} d\omega \end{cases}$$

inoltre:

$$\overline{B'C''} = \overline{B'C'} \sin \vartheta = \sqrt{g} d\omega \sqrt{\frac{eg - f^2}{eg}} = \sqrt{\frac{eg - f^2}{e}} d\omega$$

$$\overline{C'C''} = \overline{B'C'} \cos \vartheta = \sqrt{g} d\omega \frac{f}{\sqrt{eg}} = \frac{f}{\sqrt{e}} d\omega$$

$$\overline{P'C''} = \sqrt{e} d\varphi + \frac{f}{\sqrt{e}} d\omega = \frac{ed\varphi + fd\omega}{\sqrt{e}}$$

Pertanto:

$$\tan \alpha' = \frac{\overline{B'C''}}{\overline{P'C''}} = \frac{\sqrt{eg - f^2} \frac{d\omega}{ed\varphi + fd\omega}}{\sqrt{eg - f^2} \frac{d\omega}{e + f \frac{d\omega}{d\varphi}}} \quad (6.8)$$

Dalla (6.7) si ricava il valore $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\rho}{r} \tan \alpha$ che sostituito nella (6.8) fornisce:

$$\tan \alpha' = \sqrt{eg - f^2} \frac{\frac{\rho}{r} \tan \alpha}{e + f \frac{\rho}{r} \tan \alpha} \quad (6.9)$$

da cui si ricava $\delta = \alpha - \alpha'$.

6.3 CLASSI DELLE RAPPRESENTAZIONI CARTOGRAFICHE

Le classi di rappresentazione cartografiche sono distinte in funzione del modulo di deformazione lineare, superficiale ed angolare.

6.3.1 Carte afilettiche

Le carte *afilettiche* presentano tutte le deformazioni, anche se ridotte in proporzione. È evidente che non è possibile scrivere un'equazione generale, in quanto non esiste alcuna condizione che l'intera classe delle rappresentazioni afilettiche debba soddisfare. È solo possibile scrivere l'equazione di una singola rappresentazione, imponendo il rispetto di particolari vincoli.

Le carte afilettiche sono utilizzate per piccolissime scale di rappresentazione, vale a dire per elevate porzioni del territorio (carte globali), ma non sono utilizzabili ai fini dei calcoli, perché non sono esprimibili da equazioni generali.

6.3.2 Rappresentazioni conformi

Le carte con *rappresentazione conforme* sono le più utilizzate. In questo tipo di carte la deformazione angolare è nulla ($\delta = 0$), ossia sono conservati gli angoli

(l'azimut sul piano dell'ellissoide è uguale a quello sul piano della carta). Di conseguenza, i meridiani e i paralleli (linee per le quali $\varphi = cost$ e $\lambda = cost$) sono tra loro ortogonali anche sul piano della carta e costituiscono quello che si chiama *reticolato geometrico*.

Le *equazioni generali* sono:

$$\begin{cases} \delta = 0 \\ \frac{\partial m^2}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

In particolare, la seconda equazione afferma che, preso un particolare punto, la deformazione di tutte le linee uscenti da quel punto è indipendente dall'azimut α .

6.3.3 Rappresentazioni equivalenti

Le carte con classe di *rappresentazione equivalente* sono quelle in cui il modulo di deformazione superficiale M è costante ed in particolare è unitario.

L'*equazione generale* è $M=1$.

Queste carte sono meno utilizzate di quelle conformi e sono per lo più utilizzate per scopi catastali ed agrimensori. Hanno molti inconvenienti tra i quali quello di avere le deformazioni lineari ed angolari molto elevate, pertanto, si possono utilizzare per zone molto piccole.

Le rappresentazioni conformi ed equivalenti sono infinite, in quanto, i parametri possono variare illimitatamente, ottenendo infinite formule di corrispondenza. In realtà, una volta scelta una determinata classe di rappresentazione, si cercherà di definirne le equazioni generali e le formule di corrispondenza in modo tale che abbiano un utilizzo particolare e che

consentano di ottenere, nel caso della rappresentazione conforme, m e M piccoli e nel caso della rappresentazione equivalente δ piccolo.

In ogni caso si cerca sempre di ridurre m , perché in nessuna delle due rappresentazioni è eliminabile.

6.4 SCALA E RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA CARTA

Una volta stabilite le equazioni della rappresentazione cartografica, è possibile calcolare le coordinate cartesiane piane, rispetto ad un prefissato sistema di riferimento, dei punti dell'ellissoide in funzione delle coordinate geografiche.

Si realizza così una rappresentazione dell'ellissoide sul piano per via puramente numerica che costituisce la parte analitica della rappresentazione cartografica stessa.

Successivamente, si passa alla realizzazione pratica della rappresentazione, riportando sul piano della carta sia le coordinate cartesiane dei punti che tutti gli elementi lineari opportunamente ridotti di un certo rapporto $1/n$, che rappresenta la *scala della carta*. Questo è definito dal rapporto fra l'unità di lunghezza misurata sul disegno e la corrispondente lunghezza misurata direttamente sull'oggetto, ovvero come il rapporto fra la lunghezza di un elemento lineare misurato sul piano della rappresentazione e quella del corrispondente elemento oggettivo misurato sulla superficie dell'ellissoide.

La realizzazione di una carta è funzione solo del punto, nel caso di rappresentazioni conformi, del punto e della direzione uscente da esso, nel caso più generale.

Il concetto di scala può mantenersi soltanto precisando i punti e le direzioni in cui il modulo di deformazione lineare assume il valore unitario; le variazioni del

modulo di deformazione lineare provocano, infatti, nel passaggio dalla fase analitica a quella grafica, variazioni corrispondenti della scala della carta.

La realizzazione di una carta è necessariamente influenzata da vari errori e, pertanto, caratterizzata da un certo grado di precisione valutabile introducendo il cosiddetto *errore di graficismo*. Questo parametro rappresenta l'errore massimo che si può commettere nel tracciamento di una linea durante la fase grafica di rappresentazione e può essere stimato in valore assoluto pari a $0,2 \text{ mm}$ (in relazione alla capacità risolutiva dell'occhio umano nel distinguere elementi molto piccoli e nel tracciamento materiale della carta). Per una carta in scala $1/n$ l'errore che si commette nel desumere le reali dimensioni di un oggetto rappresentato, si deducono dalla relazione:

$$\left[(x)_{\text{letto sulla carta}} (mm) \pm 0,2 (mm) \right] = \frac{\text{distanza reale (m)} * 1000}{n}$$

Si desume che l'errore è tanto maggiore quanto maggiore è il denominatore n della scala.

La *scala di rappresentazione* ($1/n$), è tanto più piccola quanto più grande è n . A parità di superficie di rappresentazione, più aumenta il rapporto di riduzione, più piccola diventa la scala, maggiore sarà la porzione di territorio rappresentata.

Il *rapporto di ingrandimento* $n/1$, invece, indica quante volte l'oggetto rappresentato è ingrandito rispetto alla realtà.

6.5 REALIZZAZIONE GRAFICA DI UNA CARTA

Le carte si dividono in:

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. <i>carte geografiche</i> | scala $\leq 1 : 1.000.000$ |
| 2. <i>carte corografiche</i> | $1 : 1.000.000 \leq$ scala $\leq 1 : 200.000$ |

- | | |
|------------------------------|--|
| 3. <i>carte topografiche</i> | $1 : 200.000 \leq \text{scala} \leq 1 : 5.000$ |
| 4. <i>piante e mappe</i> | scala $1 : 5.000$ e $1 : 500$ |

In particolare le *Carte Tecniche Regionali* (CTR, cfr. DDD) sono in scala $1 : 10.000$ e $1 : 5.000$.

Le *carte topografiche* possono essere:

- *piccole* con scala $1 : 25.000$;
- *medie* con scala compresa tra $1 : 25.000$ e $1 : 10.000$;
- *grandi* con scala uguale a $1 : 10.000$.

Le carte tecniche con scala minima inferiore a $1 : 10.000$ sono utilizzate per interventi tecnici sul territorio.

6.6 RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI

Ricordiamo che le rappresentazioni equivalenti sono quelle con modulo di deformazione superficiale unitario ($M=1$). Partendo dalla definizione di M :

$$M = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\rho r} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega} \right)^2 \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2}}{\rho r} = 1$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \omega} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \omega} \right)^2 - 2 \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \omega}}{\rho r} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2}}{\rho r} = 1 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} = \rho r$$

è l'equazione generale.

La rappresentazione deve soddisfare tale equazione generale attraverso una serie di condizioni al contorno.

6.7 PROIEZIONE DI SANSON-FLAMSTEED O NATURALE

La proiezione di Sanson-Flamsteed è una rappresentazione equivalente, in cui una data porzione di territorio racchiusa tra due meridiani e due paralleli è proiettata sul piano della carta secondo un particolare quadrilatero (fig. 6.9):

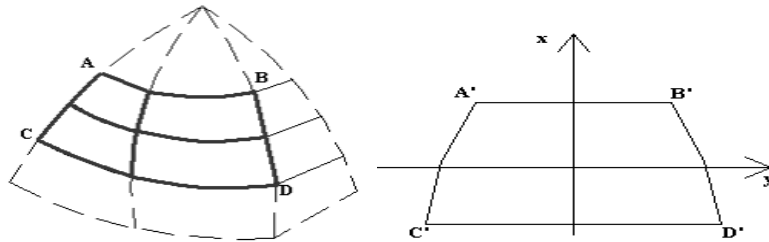


Figura 6.9 - Proiezione di Sanson-Flamsteed (zona di ampiezza in longitudine di 30' e latitudine 20')

Le proiezioni dei paralleli sono delle rette, mentre i meridiani sono elementi curvilinei. Le condizioni al contorno sono, pertanto:

1. i paralleli sono proiettati come rette parallele all'asse y (x è funzione solo di φ e non di ω);
2. l'equidistanza sull'asse delle x è conservata ($m=1$).

Queste implicano, rispettivamente, che:

- $x = x(\varphi) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \omega} = 0$
- $m = \frac{dx}{\rho \cdot d\varphi} = 1 \Leftrightarrow \frac{dx}{d\varphi} = \rho \Leftrightarrow dx = d\varphi\rho$

Dalla prima equazione si ottiene:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} = \rho r = \rho N \cos \varphi \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} &= \rho N \cos \varphi \\
 \Leftrightarrow \frac{\rho d\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} &= \rho N \cos \varphi \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{d\omega} &= N \cos \varphi \Leftrightarrow dy = d\omega N \cos \varphi
 \end{aligned}$$

integrando, si ottengono le *formule di corrispondenza*:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \cdot d\varphi = \rho(\varphi - \varphi_0) \\ y = N \cos \varphi \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = N \cos \varphi(\omega - \omega_0) \end{array} \right.$$

dove i termini integrati sono rispettivamente l'arco di meridiano e l'arco di parallelo.

Se, anziché considerare il valore di ρ variabile, si considera un valore medio ρ_m tra le latitudini φ_0 e φ , le due equazioni precedenti si semplificano in:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho_m \cdot (\varphi - \varphi_0) \\ y = N \cdot \cos \varphi \cdot (\omega - \omega_0) \end{array} \right.$$

Ricordando che:

$$N \cos \varphi = r$$

ed, inoltre, essendo N funzione di φ si ottiene facilmente che

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -N \operatorname{sen} \varphi (\omega - \omega_0)$$

Pertanto, la deformazione lineare m vale:

$$m \cong 1 - \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

che, a seconda dei valori dei parametri, assume i seguenti valori:

- $\omega = \omega_0 \Rightarrow m = 1$ (in corrispondenza del meridiano centrale);
- $\varphi = 0 \Rightarrow m = 1$ (all'equatore);
- $\alpha = 90^\circ$ e $270^\circ \Rightarrow m = 1$

$m_{max} = 1 \pm \frac{1}{2}(\omega - \omega_0) \operatorname{sen} \varphi$ lo si ha nella direzione con $a = 45^\circ$ (azimut) uscente dal punto, o nella direzione simmetrica.

La deformazione angolare data da:

$$\delta = \alpha' - \alpha = (\omega - \omega_0) \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

assume valori:

- $\delta = 0$, per $\varphi = 0$, $\omega = \omega_0$ (equatore e meridiano centrale);
- $\delta = 0$, per $a = 0, 180^\circ$ (direzione del meridiano);
- δ_{max} , per $a = 90^\circ, 270^\circ$ (nella direzione dei paralleli); l'equazione generale di δ_{max} è la seguente: $\delta_{max} = (\omega - \omega_0) \operatorname{sen} \varphi$.

La rappresentazione di Flamsteed è stata impiegata per la prima versione dei fogli della Carta d'Italia alla scala 1:100.000, utilizzando fusi di $30'$ d'ampiezza.

6.8 RAPPRESENTAZIONI CONFORMI

Ricordiamo che sono rappresentazioni che presentano la deformazione angolare nulla.

L'espressione generale del modulo di deformazione lineare è:

$$m^2 = \frac{e}{E} \cos^2 \alpha + \frac{2f}{\sqrt{EG}} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{g}{G} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Partendo dall'uguaglianza $\frac{\delta m^2}{\delta \alpha} = 0$ e ponendo

$$e^* = e/E, \quad g^* = g/G, \quad f^* = f/\sqrt{GE}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial m^2}{\partial \alpha} = -2e^* \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + 2f^* \cos^2 \alpha - 2f^* \operatorname{sen}^2 \alpha + 2g^* \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$$

espressione verificata solo per:

$$\begin{cases} g^* - e^* = 0 \\ f^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{e}{\rho^2} = \frac{g}{r^2} \\ f = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Le (6.10) sono le *equazioni generali delle rappresentazioni conformi*.

Nelle rappresentazioni conformi, oltre alla $\frac{\delta m^2}{\delta \alpha} = 0$ deve essere verificata la

relazione $\delta = 0$, pertanto, sostituendo le (6.10) nella (6.9) e tenendo conto che

$$\frac{g}{e} = \frac{r^2}{\rho^2} \text{ si ha:}$$

$$\tan \alpha = \tan \alpha' \Rightarrow \alpha' = \alpha$$

Condizione che indica una *rappresentazione isogonica*.

Introduciamo ora un parametro Φ (*latitudine ridotta, o isometrica, o conforme*) dato dalla seguente relazione:

$$d\Phi = \frac{\rho}{r} d\varphi$$

vale a dire:

$$\Phi = \int_0^{\varphi} \frac{\rho}{r} d\varphi$$

In questo caso le relazioni precedenti (6.10) possono essere scritte come segue:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 \\ \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial \Phi} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial \Phi}}{\frac{\partial y}{\partial \omega}} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = K$$

da cui:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \Phi} = k \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial \Phi} = -k \frac{\partial x}{\partial \omega} \end{cases}$$

Detto sistema, sostituito nel precedente, fornisce:

$$k^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + k^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 \Rightarrow k^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 \right] = \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2$$

valida solo per $k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \Phi} = \mp \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \Phi} = \pm \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{cases}$$

Queste equazioni esprimono le condizioni di conformità e prendono il nome di *equazioni di Riemann-Cauchy*, o *equazioni di omogeneità* e rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti affinché la variabile complessa $x + jy$ sia funzione analitica della variabile complessa $\Phi + i\omega$.

$$x + jy = f(\Phi + i\omega).$$

Sviluppando $f(\Phi+i\omega)$ nell'intorno di un punto nel piano cartesiano e considerando $i\omega$ come incremento si ha:

$$x+iy = f(\Phi) + i\omega f'(\Phi) - (\omega^2/2!)f''(\Phi) - i(\omega^3/3!)f'''(\Phi) + \dots \quad (6.11.a)$$

Se vogliamo che la carta sia valida per tutta la superficie ellissoidica la (6.11.a) deve avere raggio di convergenza infinito e, quindi, la serie scritta deve avere validità generale.

Distinguendo in parte reale e immaginaria si arriva alle equazioni delle carte conformi:

$$y = \omega f'(\Phi) - (\omega^3/3!)f'''(\Phi) + (\omega^5/5!)f^{(5)}(\Phi) + \dots \quad (6.11.b)$$

$$x = f(\Phi) - (\omega^2/2!)f''(\Phi) + (\omega^4/4!)f^{(4)}(\Phi) + \dots \quad (6.11.c)$$

Tutte le rappresentazioni conformi sono ottenute particolarizzando la funzione $f(\Phi)$, cioè associando ad un valore della x , il corrispondente valore della latitudine di ogni punto del meridiano fondamentale ($\omega=0$), questo equivale a decidere come trasformare tale meridiano.

Se si introduce un sistema *isotermo* di coordinate curvilinee isometriche e la latitudine crescente, è possibile scrivere:

$$\begin{cases} e = g \\ f = 0 \end{cases} \quad \text{condizioni di conformità} \quad (6.12)$$

Il fuso di rappresentazione si indica direttamente con λ , ecco perché quando si parla di longitudine possiamo trovare ω o λ .

Le condizioni al contorno consentono di calcolare i valori delle funzioni; il numero di termini della serie è in funzione della zona da rappresentare e della precisione del calcolo delle coordinate dei punti.

Le deformazioni lineari delle rappresentazioni conformi permangono e sono in funzione dell'angolo a così definibili:

$$m^2 = \frac{e}{E} = \frac{e}{\rho^2} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \Phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi} \right)^2 \right]$$

$$m^2 = \frac{g}{G} = \frac{g}{r^2} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]$$

indifferentemente utilizzabili.

Dall'equazione generale della rappresentazione conforme $M = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\rho r} = 1$ e

dalle (6.12) si ha:

$$M = \sqrt{\frac{eg}{EG}} = \frac{\sqrt{eg}}{\rho r} \quad (6.13)$$

Se $m^2 = \frac{e}{E} = \frac{g}{G} = \frac{e}{\rho^2} = \frac{g}{r^2}$ sostituendo in (6.13) si ha:

$$M = \sqrt{\frac{e}{E}} \cdot \sqrt{\frac{g}{G}} = m \cdot m = m^2$$

Due tipi particolari di rappresentazioni conformi sono la *rappresentazione di Mercatore* e la *rappresentazione di Gauss*.

6.9 RAPPRESENTAZIONE DI MERCATORE

La rappresentazione di Mercatore è una rappresentazione a cilindro diretto. La terra, considerata approssimativamente sferica, è proiettata su un cilindro (tangente all'equatore) in modo che l'equatore sia un cerchio direttore del cilindro e che l'asse della terra coincida con l'asse del cilindro (fig. 6.10).

È una proiezione conforme in cui:

- gli angoli tra i meridiani e i paralleli sono angoli retti;

- i meridiani ed i paralleli si proiettano come linee parallele tra loro (ed ortogonali).

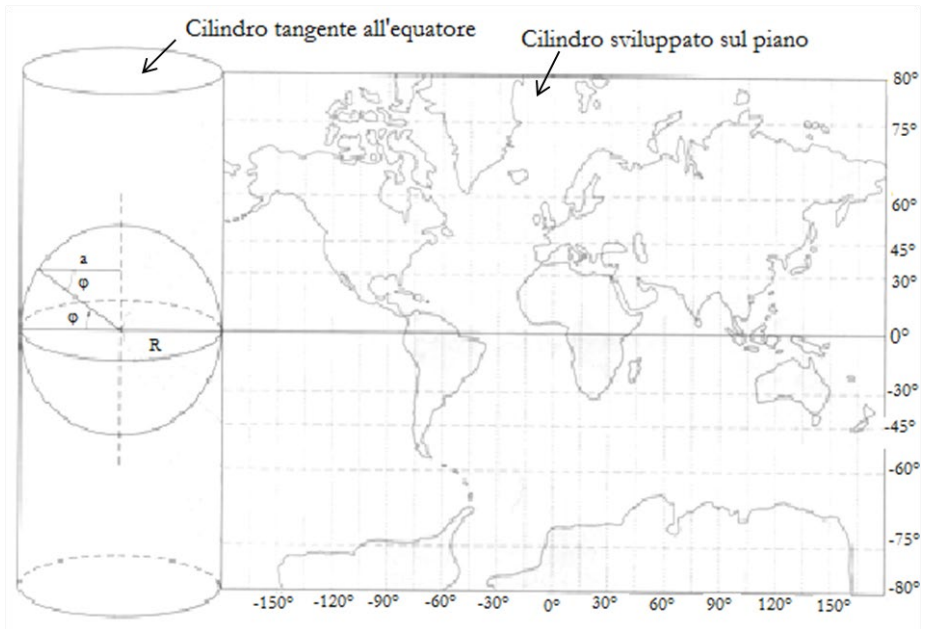


Figura 6.10 - Rappresentazione di Mercatore

Le condizioni al contorno sono, di conseguenza, le seguenti:

1. le deformazioni lineari m nella direzione y sono nulle ($m=1$) ovvero l'intervallo tra i meridiani è costante;
2. le trasformate piane dei meridiani sono rette parallele all'asse x ed equidistanti.

Se le deformazioni lineari sono costanti, l'elemento di parallelo infinitesimo, corrispondente a dy proiettato, è dato da:

$$\frac{dy}{a d\lambda} = 1 \Rightarrow dy = a \cdot d\lambda$$

dove a è il semiasse equatoriale.

Integrando dall'origine 0 si ottiene $y = a\lambda$ e considerando le (6.11.c) si ha:

$$y = \frac{dF}{d\Phi} \lambda \dots \Rightarrow \frac{dF}{d\Phi} = a$$

Inoltre, dalla (6.11.b) si ha $x = F(\Phi) \Rightarrow dx = dF(\Phi)$ che per la precedente relazione diviene $dF = ad\Phi \Rightarrow dx = ad\Phi$.

Le equazioni della rappresentazione di Mercatore (partendo dalle equazioni della rappresentazione conforme e della latitudine isometrica) sono:

$$\begin{cases} x = a \int_0^{\varphi} \frac{\rho}{r} d\varphi \\ y = a\lambda \end{cases} \quad (6.14)$$

in cui $y = a\lambda$ indica che lungo la direzione della variazione di longitudine λ è costante.

6.9.1 Deformazioni lineari e superficiali nella rappresentazione di Mercatore

Nelle rappresentazioni conformi si ha:

$$m^2 = \frac{e}{\rho^2}, \text{ (oppure } m^2 = \frac{g}{r^2} \text{ con } r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}})$$

Considerando i meridiani rette parallele tra loro, si può affermare che $g=a^2$, quindi $m^2 = a^2 / r^2$.

Sostituendo il valore del semiasse a e di r (ricavati dalle equazioni parametriche dell'ellissoide), si ottiene:

$$m = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad (6.15)$$

Si può affermare che:

- m è costante lungo i paralleli perché si impone che dipenda solo da φ (m è costante ad una data latitudine);
- la deformazione lineare è costante e pari ad 1 (valore minimo), lungo l'equatore, ed assume valore massimo (infinito) per $\varphi = \pm 90^\circ$, cioè ai poli (fig. 6.11).

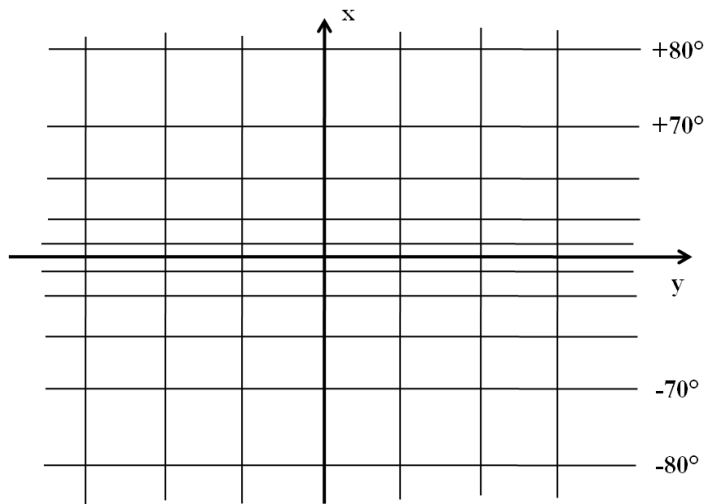


Figura 6.11 - Deformazione lungo i paralleli

La proiezione di Mercatore, quindi, mal si presta a rappresentare la Terra a latitudini superiori a $\pm 80^\circ$, come esplicito nella seguente tabella:

Tabella 6.1 - Valori notevoli di m al variare di φ

VALORI NOTEVOLI						
φ	0°	5°	20°	40°	60°	80°
m	1	1,0038	1,0638	1,7036	1,9949	5,7400

Data la conformità, il modulo di deformazione superficiale si ottiene come:

$$m^2 = M \Rightarrow M = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{cos}^2 \varphi} \quad (6.16)$$

Per ridurre le deformazioni lineari, utilizzando una proiezione a cilindro secante, si definiscono due *paralleli standard di secanza* in corrispondenza dei quali si impongono nulle le deformazioni. Il reticolato geografico si forma come prima e presenta deformazioni lineari dipendenti dall'intervallo di secanza con valori positivi (dilatazione) e negativi (contrazione), tuttavia, i valori assoluti sono inferiori a quelli del cilindro diretto.

$$\begin{cases} x = N_o \operatorname{cos} \varphi_o \int_{\varphi_o}^{\varphi} \frac{\rho}{r} d\varphi \\ y = N_o \operatorname{cos} \varphi_o \lambda \end{cases}$$

$$m = \sqrt{\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_o}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \frac{\operatorname{cos} \varphi_o}{\operatorname{cos} \varphi}$$

Altra particolarità della rappresentazione di Mercatore riguarda le rotte *lossodromie*, è infatti, utilizzata per la navigazione nautica ed aerea ^[1].

Considerando una lossodromia sull'ellissoide (ossia una linea che taglia i meridiani secondo un azimut costante) si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha_e = \frac{r}{\rho} \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{d\lambda}{d\Phi} = \text{costante}$$

Secondo la rappresentazione:

[1] Le carte nautiche devono avere particolari caratteristiche, che rendono più agevole la pianificazione della navigazione e l'inseguimento della traiettoria scelta. Queste caratteristiche sono:

- la *isogonicità*, caratteristica secondo la quale esiste l'eguaglianza tra un angolo misurato sulla terra e il corrispondente angolo misurato sulla carta nautica;
- la *rettifica delle traiettorie* che consente, quindi, di segnare con una semiretta la curva della lossodromia (particolare tipo di traiettoria nella quale è mantenuto costante l'angolo formato con i meridiani, che, sulla sfera terrestre, è rappresentata da una curva a spirale).

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ad\lambda}{ad\Phi} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{d\lambda}{d\Phi} = \text{costante} = \text{tg}\alpha_e \Rightarrow \text{tg}\alpha_r = \text{tg}\alpha_e.$$

Questo significa che la rappresentazione di una lossodromia è una retta che forma con le trasformate dei meridiani un azimuth uguale a quello della lossodromia stessa (fig. 6.12).

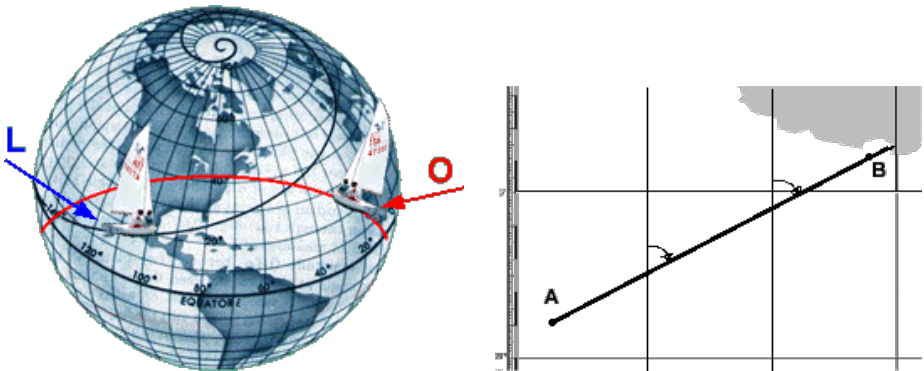


Figura 6.12 - Traiettoria rossa: Ortodromia; spirale nera (taglia i meridiani sotto lo stesso angolo): Lossodromia che è rappresentata sulla carta con una semiretta tagliante i meridiani con angolo costante.

In figura 6.12 è rappresentata una lossodromia sulla sfera. Per trovare l'angolo della rotta (azimut) che porta dal punto *A* al punto *B* è sufficiente tracciare la retta congiungente i due punti e determinare l'angolo che essa forma con la trasformata dei meridiani.

Il percorso è, in questo caso, più lungo di quello della navigazione ortodromica (lungo una geodetica sulla sfera), ma non richiede come quest'ultima una continua variazione di rotta.

L'*ortodromia* sulla sfera è la linea di minima distanza fra due punti *A* e *B*; è individuata grazie al piano passante per *A*, *B* e il centro della terra *C*. Tale piano individua un cerchio massimo, pertanto, per lunghi percorsi si naviga secondo lossodromie tra punti intermedi della geodetica.

Le carte di Mercatore, realizzate dall'Istituto Idrografico della Marina, sono delle carte tipiche utilizzate nella navigazione e sono in scala 1:150.000, 1:200.000, 1:250.000.

6.10 PROIEZIONE STEREOGRAFICA POLARE (UPS)

La *proiezione stereografica polare* è una proiezione conforme. I paralleli ed i meridiani sono proiettati su di un piano tangente passante per il polo (fig. 6.13).

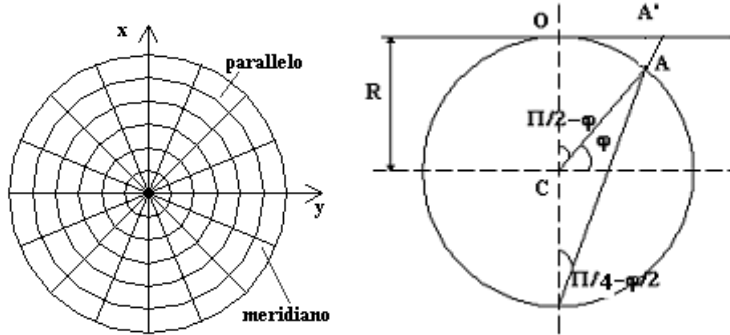


Figura 6.13 - Proiezione Stereografica Polare

I *meridiani*, sono rette uscenti dal polo, mentre i *paralleli* sono rappresentati da cerchi concentrici. Quanto detto costituisce le condizioni al contorno.

Indicata con $A'(x, y)$ la posizione di A sul piano tangente (fig. 6.14), le equazioni della proiezione stereografica polare sono:

$$\begin{cases} x = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \lambda \\ y = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin \lambda \end{cases} \quad (6.17)$$

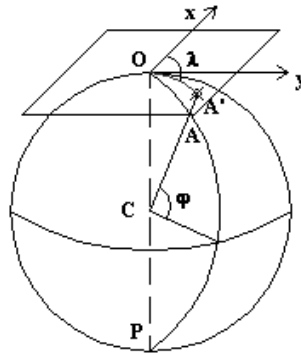


Figura 6.14 - Visualizzazione della rappresentazione

Imponendo $y=x\tan\lambda$, se λ è costante, le trasformate piane dei meridiani sono delle rette uscenti dall'origine. Sommando le espressioni di x^2 e y^2 si ottiene:

$$x^2 + y^2 = \left[2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right]^2$$

che rappresenta l'equazione di un cerchio: per valori di φ costanti i paralleli sono circonferenze concentriche in O , $r = 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ è il raggio e rappresenta la costante.

Il modulo di deformazione lineare vale:

$$m^2 = \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (6.18)$$

ed è funzione della latitudine; in particolare per $\varphi=90^\circ$ $m=1$ (ai poli non ci sono deformazioni). Detta rappresentazione è utilizzata per latitudini comprese tra 90° e i $75^\circ \div 80^\circ$, in particolare è utilizzata per rappresentare le zone polari, dove le deformazioni di Mercatore sono molte alte.

6.11 PROIEZIONE DI GAUSS (U.T.M.)

Nota anche come *proiezione a cilindro traverso*, o UTM (*Universal Transverse Mercator*), in termini proiettivi utilizza un cilindro tangente, non all'equatore, bensì al meridiano centrale di rappresentazione ed è una rappresentazione conforme in cui:

- gli angoli tra meridiani e paralleli sono di 90° ;
- il meridiano di tangenza (asse x) e l'equatore (asse y) sono le uniche linee rette, mentre tutti gli altri meridiani e paralleli sono rappresentati da curve che costituiscono un reticolato geografico.

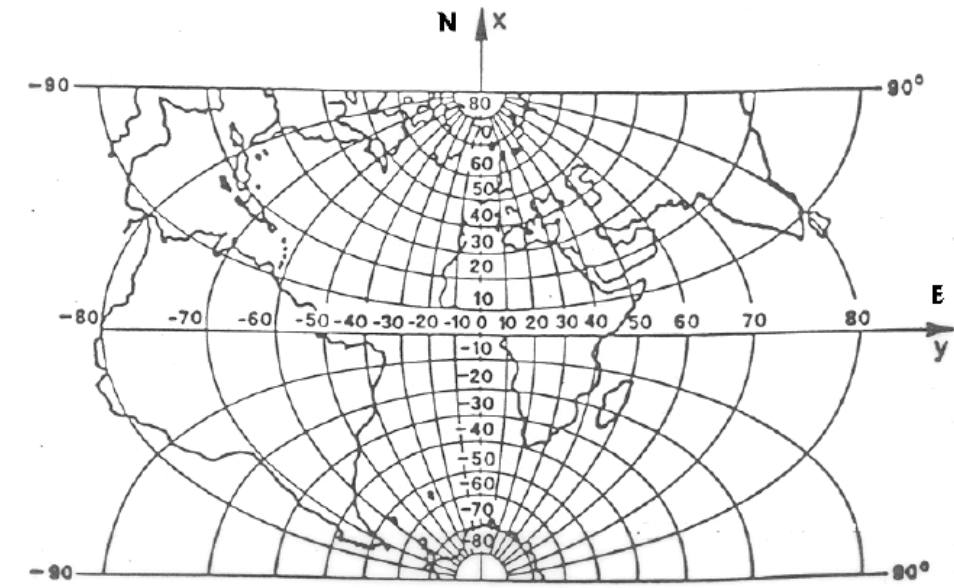


Figura 6.15 - Proiezione di Gauss

Per il meridiano di tangenza sono conservate le equidistanze, mentre le deformazioni lineari tendono ad aumentare man mano che ci si allontana da questo.

I paralleli si trasformano in archi di curve simmetriche rispetto agli assi cartografici e presentano la concavità verso il polo dell'emisfero di appartenenza; i meridiani, anch'essi simmetrici, convergono verso i poli e sono rappresentati da curve ovoidali.

Le condizioni al contorno che si ottengono dalla geometria di precisione sono:

- il meridiano centrale, o di origine, si dispone su una retta coincidente con l'asse x ;
- lungo l'asse x sono conservate le lunghezze, cioè lungo il meridiano centrale vale l'equidistanza con $m=1$:

$$m = \frac{dx}{\rho d\varphi} = 1 \Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = \rho \Rightarrow dx = \rho d\varphi \Rightarrow x = \int_0^{\varphi} \rho d\varphi$$

Dalla (6.11 b) per $\lambda = 0$, trascurando i termini in λ^4 , si ha:

$$x = F(\Phi) \Rightarrow F(\Phi) = \int_0^{\varphi} \rho d\varphi$$

Andando a calcolare le derivate (prima, seconda, ...) di $F(\Phi)$ si ottiene:

$$\frac{dF}{d\Phi} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\Phi} = \rho \frac{r}{\rho} = r = N \cos \varphi$$

$$\frac{d^2 F}{d\Phi^2} = \frac{d(N \cos \varphi)}{d\Phi} = \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\Phi} = \frac{-a \operatorname{sen} \varphi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \frac{r}{\rho} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 F}{d\Phi^2} = \frac{-N \operatorname{sen} \varphi (1 - e^2) r}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \rho}$$

Ricordando le espressioni di ρ e r :

$$\frac{d^2 F}{d\Phi^2} = -N \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi$$

da cui si ottengono

$$\begin{cases} x = \int_0^\varphi \rho d\varphi + \frac{N}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \lambda^2 \\ y = N \cos \varphi \lambda + \frac{N}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \lambda^3 \end{cases} \quad (6.19)$$

dove $t = \tan \varphi$ e $\eta = e' \cos \varphi$.

La deformazione lineare vale:

$$m = \frac{g}{r^2} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}{N^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\lambda^2 N^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi + \left[N \cos \varphi + \frac{N}{2} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \lambda^2\right]^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 1 + \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \lambda^2$$

che dopo elaborazioni matematiche conduce a:

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2)$$

funzione di φ e λ .

Per esprimerla in termini di coordinate piane x e y , dalla seconda equazione della (6.19), trascurando i termini con λ^3 , si ottiene:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi}. \quad (6.20)$$

$$\text{Per definizione } N = \rho(1 + \eta^2) = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.21)$$

esprimendo η^2 in funzione di e .

Andando a sostituire la (6.21) nella (6.20):

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\rho N} + \frac{y^4}{4! \rho^2 N^2} + \dots = 1 + \frac{y^2}{2\rho N} \quad (6.22)$$

trascurando il termine con y^4 , per distanze di qualche decina di chilometri. Essendo m un modulo infinitesimo questo varia da punto a punto.

L'espressione (6.22) indica che per $\lambda=0$ e $y=0 \Rightarrow m=1$ ovvero le distanze sono conservate sull'asse delle ordinate, mentre le deformazioni crescono con legge quadratica man mano che ci si allontana dall'asse delle x (meridiano centrale prescelto).

Se la carta di Gauss fosse usata per tutto il globo, le deformazioni anche a soli 3° dal meridiano centrale diventerebbero grandi e non accettabili, pertanto, tale rappresentazione è utilizzata solo se divisa per fusi, assimilandosi ad una *proiezione trasversa policilindrica* (fig. 6.16).

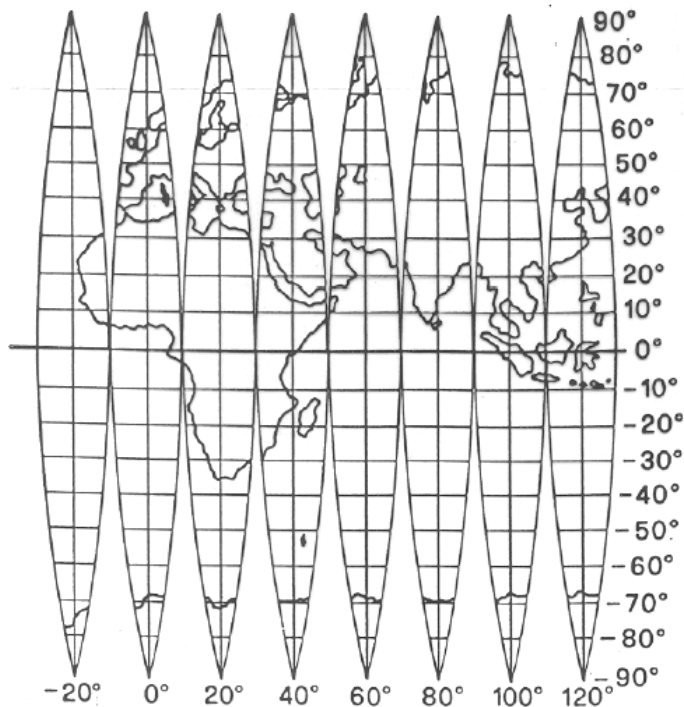


Figura 6.16 - Proiezione trasversa policilindrica

L'ideale cilindro è fatto ruotare di 6° di longitudine per volta, dando luogo a due fusi opposti di ampiezza pari a $\pm 3^\circ$ attorno al cosiddetto meridiano centrale del fuso. I due meridiani centrali risultano, ovviamente, sfalsati di 180° di longitudine. Il globo terrestre è, quindi, suddiviso in 60 fusi con ampiezza di 6° ciascuno e numerati a partire dall'antimeridiano di Greenwich. In tale ipotesi, il modulo di deformazione lineare m su un fuso di 6° è contenuto ed assume valori compresi tra 1 sul meridiano di tangenza e 1,0008 all'estremo del fuso.

6.11.1 Risoluzione di figure ellissoidiche sul piano della proiezione di Gauss

Se si considera un triangolo sulla superficie ellissoidica e lo si proietta sul piano di Gauss, si ottengono la trasformata piana e la corda.

Si consideri la corda che collega i due punti, O e P (fig. 6.17), si definisce *angolo di direzione*,

in termini di coordinate Gaussiane (x, y) , la $\tan \vartheta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

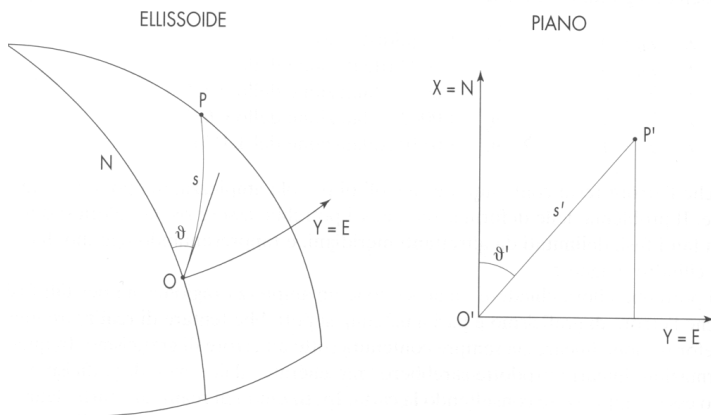


Figura 6.17 - Angolo di direzione

La lunghezza della corda (fig. 6.18) è, invece, pari a:

$$S_c = \frac{x_2 - x_1}{\cos \vartheta_{12}} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \vartheta_{12}} \quad (6.23)$$

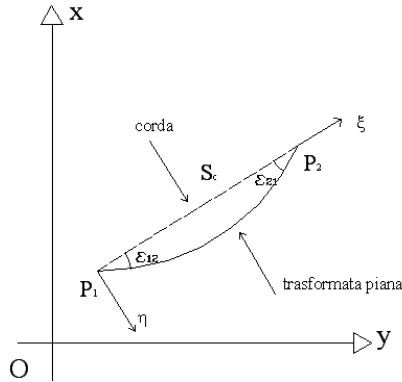


Figura 6.18 - Corda e trasformata piana corrispondente

È necessario considerare le differenze tra le corde e le trasformate piane:

$$\xi=0 \rightarrow \epsilon_{12} = \frac{2y_1 + y_2}{6\rho_m N_m} S_c \cos \vartheta_{12}$$

$$\xi=S_c \rightarrow \epsilon_{21} = -\frac{2y_1 + y_2}{6\rho_m N_m} S_c \cos \vartheta_{12}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{12} = \frac{(x_1 - x_2)(2y_1 + y_2)}{6\rho_m N_m} \\ \epsilon_{21} = \frac{(x_2 - x_1)(2y_2 + y_1)}{6\rho_m N_m} \end{cases} \quad (6.24)$$

Si deve tener conto che se si misurano angoli tra sezioni normali, questi, per i teoremi della geodesia operativa, non differiscono dagli angoli tra le geodetiche e le sezioni normali dalle lunghezza delle geodetiche. In termini di rilievo essi si risolvono sulla superficie di riferimento ellissoidica; in realtà, per semplificare i calcoli si risolvono sul piano di Gauss.

Nel passare al piano di Gauss, è necessario considerare:

- che le geodetiche si trasformano nelle loro trasformate piane;
- gli angoli di riduzione alle corde;
- la differenza tra le lunghezze delle geodetiche e le lunghezze delle trasformate piane;
- le lunghezze della corde.

Per passare dalle trasformate piane alle corde occorre aggiungere gli *angoli di riduzione* in valore assoluto e in segno; in questo modo si possono risolvere le figure sul piano di Gauss (vedere intersezione in avanti ed intersezione di reti).

Se si indica con S_c la lunghezza della corda e con S_t la lunghezza della trasformata piana, considerando una posizione relativamente sfavorevole, ossia agli estremi del fuso, per $S_c = 100 \text{ km}$ (x_1-x_2) ad una latitudine media di $\varphi = 45^\circ$:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{(x_1 - x_2)3y}{6\rho_m N_m} = 60'' \text{ (angolo di riduzione alle corde)}$$

$$\frac{S_t - S_c}{S_c} = \frac{(x_1 - x_2)^2 y^2}{24\rho_m^2 N_m^2} = 1,4 * 10^{-8}$$

Per $S_c = 100 \text{ km} \Rightarrow S_t = 1,4 \text{ mm}$ quantità trascurabile, mentre l'angolo di riduzione alle corde è pari, nelle ipotesi fatte, a $\xi_{12} = \xi_{21} = 60''$ che non è trascurabile in quanto si apprezza anche con strumenti di non elevata precisione.

6.11.2 Modulo di deformazione lineare per elementi finiti nella carta di Gauss

Nel generico punto P il modulo di deformazione lineare è dato da:

$$m = \frac{dS_t}{dS_e} = 1 + \frac{y^2}{2\rho N} \rightarrow dS_e = dS_t \left(1 + \frac{y^2}{2\rho N}\right)^{-1} \quad (6.25)$$

Si dimostra che:

$$m_{12} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\rho_m N_m} \quad (6.26)$$

Questo significa che il valore massimo del modulo di deformazione è $m_{max} = 1,0004$.

6.11.3 Convergenza dei meridiani nelle rappresentazione di Gauss

Nella rappresentazione di Gauss, man mano che ci allontaniamo dal meridiano centrale, la curvatura dei meridiani cambia, tale differenza, valutata tra meridiani consecutivi, prende il nome di *angolo convergenza dei meridiani* (fig. 6.19).

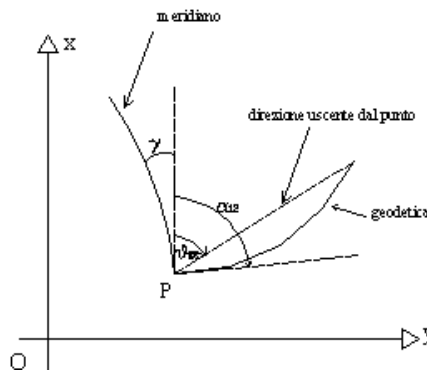


Figura 6.19 - Angolo di convergenza dei meridiani

Passando dal meridiano centrale ad un particolare meridiano passante per il punto P si ha:

$$\tan \gamma \cong \gamma \cong \lambda \sin \varphi = (\omega - \omega_0) \sin \varphi \quad (6.27)$$

mentre il valore dell'azimut sarà dato da:

$$\alpha_{12} = \gamma_1 + \mathcal{G}_{12} - \varepsilon_{12}. \quad (6.28)$$

La *convergenza* γ dei meridiani indica, pertanto, quanto varia l'angolo tra il meridiano e la parallela alla geodetica per un determinato intervallo di

longitudine; γ sarà positivo quando il punto si trova ad Est del meridiano centrale del fuso e negativo quando si trova ad Ovest.

γ varia da punto a punto e questa variazione è influenzata maggiormente dalla longitudine che dalla latitudine.

6.12 CARTOGRAFIA INTERNAZIONALE

Nella cartografia internazionale si utilizza la *rappresentazione conforme di Gauss* per fusi. I fusi sono numerati partendo dall'antimeridiano di Greenwich, al quale è stato dato il numero 30 e con questo tipo di numerazione, l'Italia appartiene ai fusi 32, 33 e 34. Quanto al sistema di coordinate cartografiche, ciascun fuso ha un suo sistema cartesiano ortogonale con coordinate N (Nord, asse delle ordinate x) ed E (Est, asse delle ascisse y), che rappresentano, rispettivamente la distanza dall'equatore e dal meridiano centrale del fuso in questione. Inoltre, per la coordinata E, per ciascun fuso è stata impostata una *falsa origine* uguale *500 km*, questo per evitare il calcolo con ascisse negative. Quanto alla coordinata N, invece, è stata introdotta una falsa origine pari a *10.000 km* per l'emisfero Sud (falsa origine assente per l'emisfero Nord), al fine di evitare il calcolo con ordinate negative.

Considerando i paralleli (a partire da $\pm 80^\circ$) ogni 8° , in ciascun fuso si individuano 20 *fasce* indicate con le lettere dell'alfabeto (A-Z, ad eccezione di I e O). Oltre alla suddivisione in fusi e fasce, è stata adottata anche la suddivisione in quadrati di 100 km di lato ed individuati da due lettere maiuscole (fig. 6.20).

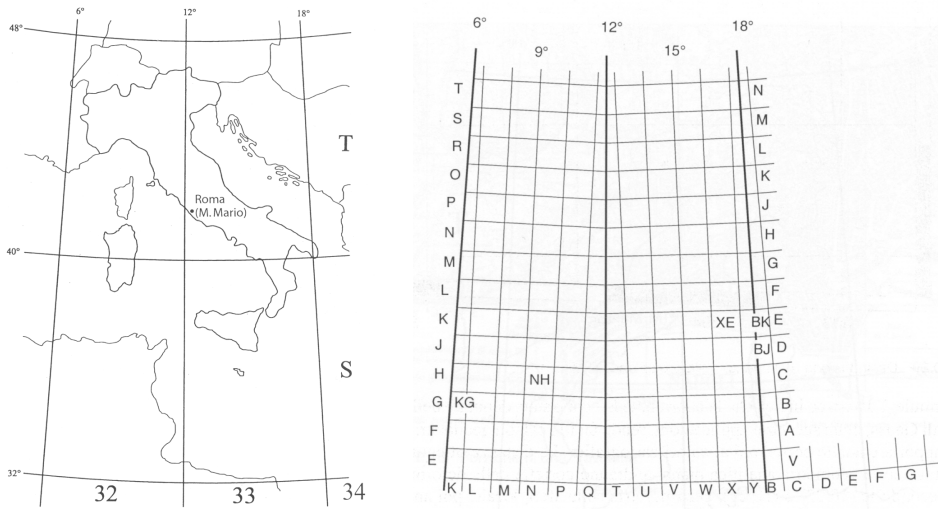


Figura 6.20 – *Suddivisione in fusi, fasce e quadrati*

La cartografia internazionale, oltre a quella di Gauss, adopera in alcuni casi la rappresentazione su superficie conica, di cui tipica è quella di *Lambert*.

È una rappresentazione conforme, in cui la superficie di riferimento è proiettata su un cono avente l'asse coincidente con l'asse di rotazione terrestre, e tale da essere tangente all'ellissoide lungo un parallelo, o secante l'ellissoide lungo due paralleli (fig. 6.21).

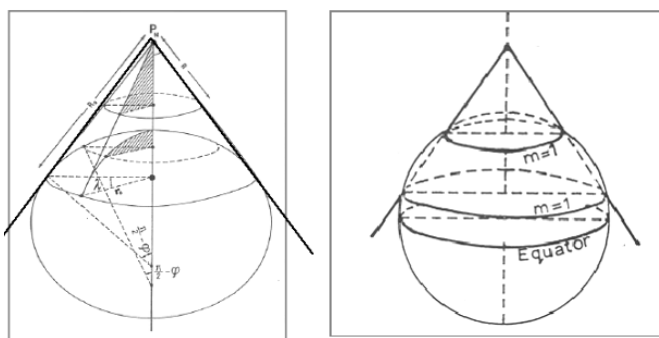


Figura 6.21 - *Rappresentazione di Lambert con cono tangente e secante l'ellissoide*

La superficie della carta è definita entro un settore circolare, il cui angolo al vertice dipende dall'angolo di apertura del cono (fig. 6.22).

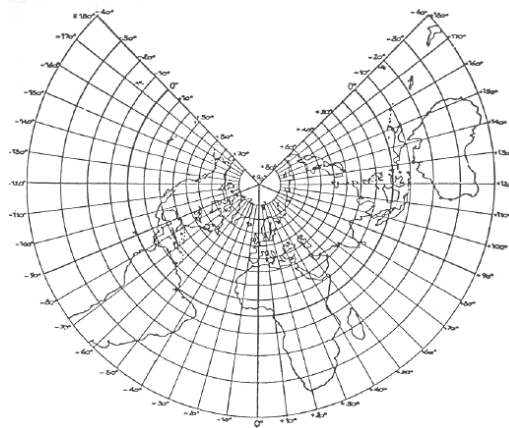


Figura 6.22 - Cartografia di Lambert

In essa i meridiani sono rappresentati sul piano cartografico come rette uscenti dal punto omologo del vertice del cono, mentre i paralleli sono archi di circonferenze. Le linee standard sono costituite da un solo parallelo, per il cono tangente, o da due paralleli, per il cono secante.

6.13 RAPPRESENTAZIONE DI GAUSS-BOAGA

Nel sistema internazionale UTM (*Proiezione Universale Trasversa di Mercatore – Universal Transverse Mercator*) l'Italia è posta nei fusi 32, 33 e 34, ciascuno di 6° di ampiezza. Considerando in luogo del cilindro tangente all'ellissoide, lungo il meridiano centrale, un cilindro coassiale al primo secante all'ellissoide lungo due linee simmetriche, rispetto al meridiano di tangenza, si ottiene una proiezione dell'ellissoide sul cilindro ed un suo sviluppo caratterizzati da:

- il meridiano centrale della zona delimitata dalle due linee di secanza e l'equatore, si trasformano in due rette ortogonali costituenti il riferimento piano della proiezione;
- nella zona compresa tra le due linee di secanza si hanno deformazioni lineari negative (contrazioni);
- lungo le linee di secanza le deformazioni lineari sono nulle ($m=1$);
- nella zona esterna alle due linee di secanza le deformazioni lineari sono positive (dilatazione).

A seconda della scelta del cilindro secante si potranno differenzialmente contenere le deformazioni lineari massime.

Analiticamente una contrazione equivale a ridurre le coordinate gaussiane (6.19), moltiplicandole per il fattore di riduzione $k = (1-n)$, dove $n < 1$ è il *coefficiente di riduzione*. Anche il modulo di deformazione m sarà ridotto della stessa quantità dando origine al *modulo di deformazione ridotto* dato da:

$$m_r = Km \cong 1 - n + \frac{y^2}{2\rho N}$$

Il valore del coefficiente di riduzione deriva dalla considerazione di ottenere valori di deformazione lineare massima pari alla metà di quelli ottenibili per una rappresentazione UTM; pertanto, si ha:

$$n = \frac{1}{2} \frac{y_{max}^2}{2\rho N}$$

Il coefficiente di riduzione da adottare sarà, quindi, $n=0,0004 \Rightarrow k=0,9996$ ottenendo $0,9996 < m_r < 1,0004$ con valore, rispettivamente, pari a $0,9996$ in corrispondenza del meridiano di tangenza e $1,0004$ in corrispondenza dell'estremo del fuso. Si osserva che le deformazioni ottenute rientrano nei limiti delle approssimazioni grafiche di una carta in scala 1:25.000.

La proiezione di Gauss così modificata è stata adottata per tutta la cartografia ufficiale italiana e denominata *Sistema Nazionale Gauss –Boaga*.

Poiché ad ognuno dei due fusi corrisponde un differente sistema di assi cartesiani, le coordinate dei punti appartenenti ad uno di essi non sono omogenee con quelle dei punti appartenenti all'altro. Per correlare punti appartenenti a fusi diversi è stata prevista una *zona di sovrapposizione* i cui punti sono individuati dalle coordinate calcolate nel sistema di riferimento in entrambe i fusi.

L'ampiezza della zona di sovrapposizione è di 30' (fig. 6.23) e corrisponde a quella di un foglio al 100.000 in cui il fuso Ovest si spinge con il suo meridiano estremo orientale fino alla longitudine 12° 27' 08,40" di Roma Monte Mario da Greenwich, ovvero allargato verso Est di 30', mentre il fuso Est si estende per altri 30' al fine di contenere tutto il territorio nazionale (penisola salentina nell'UTM compresa nel 34° fuso); di conseguenza l'ampiezza di entrambi i fusi è di 6°30'.

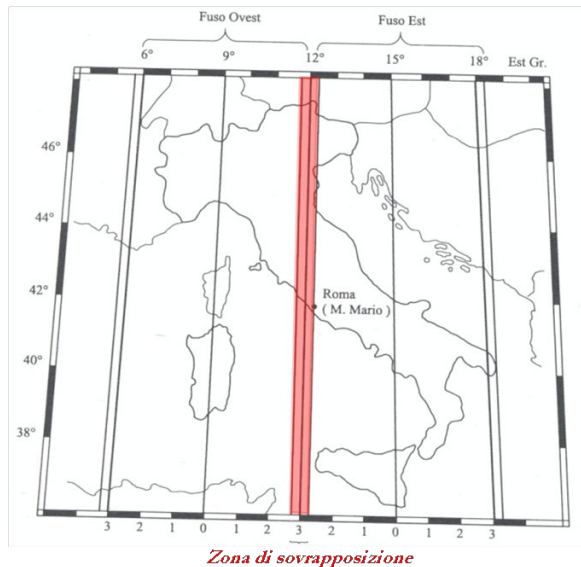


Figura 6.23 – Rappresentazione Gauss-Boaga

Le false origini sono pari a 1500 km per il fuso Ovest e 2520 km per il fuso Est. Tali valori sono stati scelti con le seguenti considerazioni: la prima cifra indica il fuso (1 quello ad Ovest, 2 quello ad Est), il valore 500 è tale da rendere il meridiano centrale intermedio nell'ambito delle cifre a disposizione, i 20 km aggiunti alla falsa origine del fuso Est impediscono confusioni nelle coordinate dei punti appartenenti alla zona di sovrapposizione.

Sia nella rappresentazione di Gauss che nella Gauss-Boaga si indica con N l'asse delle ordinate e con E l'asse delle ascisse; tutti gli elementi cartografici conservano il taglio geografico in cui i bordi dell'elemento sono costituiti dalle trasformate piane di una coppia di meridiani e paralleli sui quali sono riportati in primi latitudine e longitudine. Per la determinazione delle coordinate gaussiane è introdotto un reticolato chilometrico ottenuto riportando le parallele al sistema stesso, questo è costituito da un reticolato a maglie quadrate di 1 km di lato (nella scala 1:25.000) non coincidente con quello geografico. L'angolo fra i due reticoli misura la convergenza dei meridiani nel punto stesso. Le coordinate UTM e le Gauss-Boaga differiscono fra loro in quanto, le prime derivano dalle coordinate geografiche calcolate sull'ellissoide internazionale (Hayford) orientato a Potsdam vicino a Bonn, le seconde derivano dalle stesse coordinate calcolate sul medesimo ellissoide orientato a Roma Monte Mario.

6.14 CARTOGRAFIA ITALIANA

La cartografia ufficiale italiana è inquadrata, ad eccezione delle carte catastali, nel *Sistema Nazionale Gauss Boaga* denominato anche *Roma 40*, anche se ormai in disuso, la cui definizione è di seguito riportata:

- il *sistema geodetico di riferimento* è costituito dall'ellissoide internazionale di Hayford orientato a Roma M. Mario, 1940 ($12^{\circ}27'08,40''$ da Greenwich);

- la *rete di inquadramento* è costituita dalla triangolazione IGM, compensata tra il 1909 e il 1918; le coordinate dell'intera rete sono state ricalcolate a partire dal 1940 (anno di adozione di Hayford) con longitudine M. Mario;
- *rappresentazione di Gauss Boaga* con fattore di scala 0,9996 su due fusi di $6^{\circ}30'$ di ampiezza.

Per il taglio secondo il reticolato geografico, per le carte IGM è oggi utilizzato il sistema europeo ED50 la cui definizione è:

- il *sistema geodetico di riferimento* è costituito dall'ellissoide internazionale di Hayford con orientamento europeo 1950 a Potsdam (Bonn);
- *rete di inquadramento* costituita dalla selezione delle reti europee del I ordine;
- *rappresentazione di Gauss*, con fattore di scala 0,9996 su due tre di 6° di ampiezza.

Il territorio nazionale, nella precedente edizione, era stato suddiviso in 284 *fogli* in scala 1:100.000 (fig. 6.24).

Ogni foglio, a sua volta, è diviso in quattro *quadranti*, ciascuno in scala 1:50.000 e numerati in senso orario a partire da quello di NE. Ogni quadrante è diviso in 4 *tavolette* in scala 1:25.000 che si indicano con riferimento al numero di foglio e numero di quadrante e con l'orientamento NE, SE, SO, NO. Ogni tavoletta è suddivisa in 4 *sezioni* in scala 1:10.000 (fig. 6.25).

Attualmente l'IGM sta gradualmente sostituendo la produzione cartografica 1:100.000 con quella in scala 1:50.000 in cui ogni carta della serie 50 (e 50/L, con limiti amministrativi) è identificata con: numero del foglio (es. 110, 20, ecc.); titolo (che è il dato che serve individuare per l'acquisto su IGM e-shop). Ogni *sezione* della serie 25 è identificata con: numero del foglio (es. 110, 20, ecc.) che corrisponde alla cartografia 1:50.000; sezione (per ogni foglio ne esistono quattro identificate con numeri romani: I, II, III e IV); titolo.

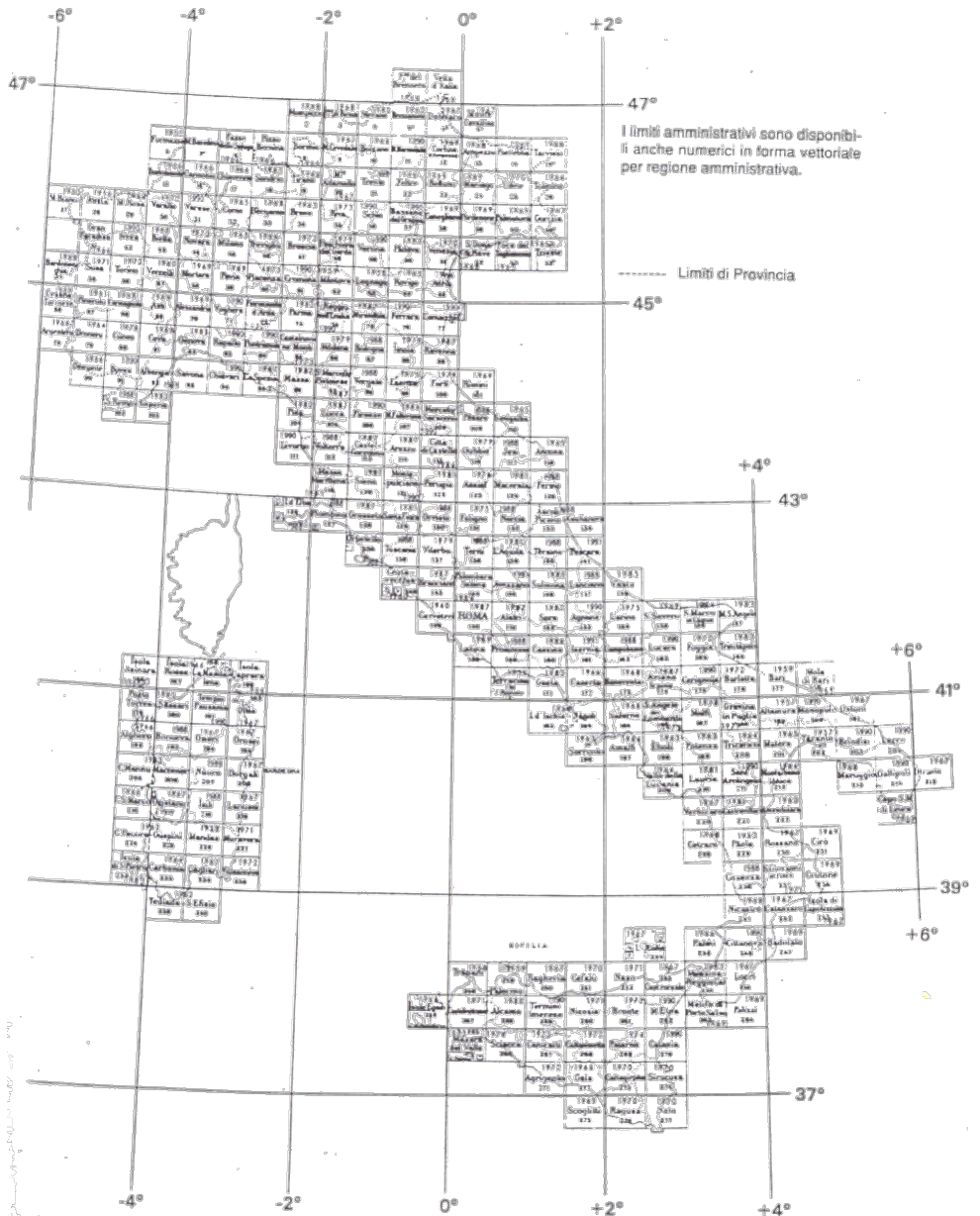


Figura 6.24 - I fogli della Carta d'Italia in scala 1:100.000

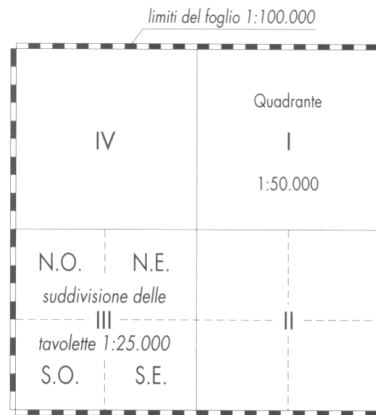


Figura 6.25 - Suddivisione in Fogli 1:100.000

La nuova serie adotta fogli in scala 1:50.000 hanno un'ampiezza di 12' di latitudine e 20' di longitudine e sono, a loro volta, suddivisi in sezioni in scala 1:10.000; ogni sezione è divisa in quattro elementi in scala 1:5.000 ed, infine, ogni elemento è suddiviso in mappe in scala 1:1.000 o 1:2.000 (fig. 6.26).

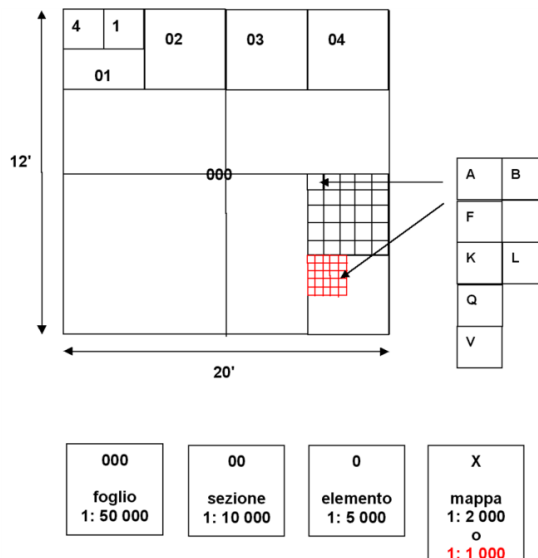


Figura 6.26 – Suddivisione Fogli 1:50.000

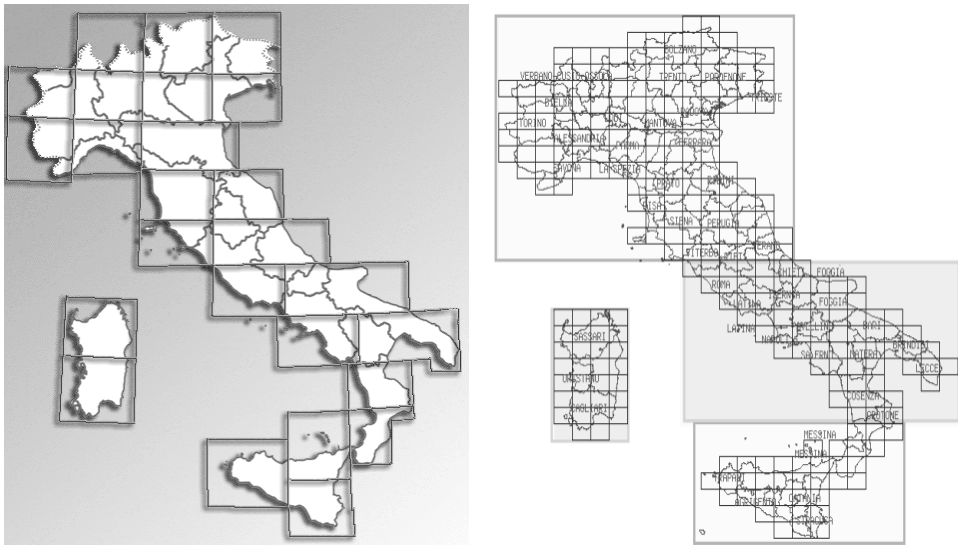


Figura 6.27 - Quadro di unione della nuova serie 25 e 50; 25 e 100

6.15 LETTURA DI UNA CARTA

Una carta deve rispondere a determinati requisiti che ne determinano l'attendibilità e l'affidabilità:

- *veridicità*: corrispondenza al vero delle informazioni;
- *leggibilità*: univocità nell'interpretazione, similitudine tra realtà e disegno e grazie agli elementi di autocertificazione (legenda, scala, ecc.);
- congruenza*: nessuna informazione presente sulla carta deve essere contraddetta da altre.

La carta, quindi, intesa come foglio disegnato, completato dalla cornice e dalle informazioni a margine, descrive topograficamente e morfologicamente la porzione di territorio ivi riportata.

Le informazioni che sono generalmente contenute in una carta riguardano:

- la planimetria, cioè la proiezione nel piano del disegno di particolari naturali ed artificiali del terreno;

- L'altimetria, fornita attraverso punti quotati e curve di livello (non è sempre presente, ad esempio non si trova nelle carte catastali).

Rivestono grande importanza, inoltre:

- la precisione, che deve essere uniforme e inferiore ad una tolleranza predefinita (massimo scostamento tra distanze e dislivelli ricavabili dalla carta e le corrispondenti quantità sulla superficie fisica);
- il rapporto di scala $1:n$, dove n è il numero di volte per cui è ridotta sulla carta la distanza topografica tra due punti. In generale il rapporto tra la lunghezza della linea sulla carta e quella corrispondente sulla superficie di riferimento varia da punto a punto; pertanto, si considera come scala il rapporto riferito alle linee isometre sulle quali le lunghezze sono conservate o alterate in rapporto costante, e si estende tale valore indicativo all'intera carta. Il rapporto di scala determina il grado di dettaglio della carta, la sua precisione, l'equidistanza delle curve di livello e la tipologia dei segni convenzionali adottati.

Planimetria e altimetria non sono, però, le uniche informazioni presenti, infatti, sono riportate anche informazioni di “contorno” che definiscono il layout della carta: parametratura, cornice e legenda.

6.15.1 Esempio di lettura della Carta topografica d'Italia serie 25/V

La rappresentazione su carta in scala 1:25.000 si compone di 3545 elementi, denominati *tavolette*, che hanno le dimensioni di 7'30" in longitudine e 5' in latitudine. Le diagonali sono di circa 12 km e ritrae una zona con estensione di circa 100 km^2 .

È inquadrata sia nella rappresentazione conforme di Gauss-Boaga, sia nel sistema geodetico nazionale con reticolato chilometrico UTM riferito al sistema geodetico europeo (*European Datum 1950*, ED50).

Nella nuova serie, inoltre, la rappresentazione UTM è riferita anche al sistema geodetico globale WGS84. All'art. 2 del D.P.C.M. del 10/11/11 “Adozione del Sistema di riferimento geodetico nazionale.”, infatti, si legge “... *il Sistema di riferimento geodetico nazionale adottato dalle amministrazioni italiane è costituito dalla realizzazione ETRF2000 - all'epoca 2008.0 - del Sistema di riferimento geodetico europeo ETRS89, ottenuta nell'anno 2009 dall'Istituto Geografico Militare, mediante l'individuazione delle stazioni permanenti l'acquisizione dei dati ed il calcolo della Rete Dinamica Nazionale*”. Pertanto, va sottolineato che, preso un generico punto P sulla superficie terrestre, in termini di proiezioni cartografiche, il sistema Gauss-Boaga, UTMED50 e UTMWGS84, pur considerando proiezioni conformi, restituiscono coordinate curvilinee diverse. Questo è attribuibile sia ai diversi sistemi geodetici di riferimento, sia alle differenti operazioni di determinazione e compensazione delle reti geodetiche che li materializzano.

L'orografia a curve di livello ha equidistanza generalmente di 25 m.

La carta deriva prevalentemente da rilievo fotogrammetrico, la cui restituzione è stata fatta alla scala 1:20.000 per migliorare poi nella riproduzione la qualità della rappresentazione al 25.000.

Al bordo della tavoletta (così come nelle carte alle altre scale) sono riportate tutte le indicazioni e le istruzioni cartografiche nonché i segni convenzionali.

Preso una qualsiasi tavoletta IGM, su di essa sono individuabili immediatamente:

- il titolo, dove sono riportate tutte le informazioni relative alle caratteristiche della carta e gran parte degli elementi necessari per interpretare correttamente le informazioni che essa deve fornire;
- la località, ovvero sinteticamente la zona rappresentata nella carta, con riferimento alla città o alla località geografica più rilevante;
- il tipo di proiezione cartografica utilizzata;
- il n. del foglio I.G.M., il quadrato, l'orientamento, il n. del fuso in cui ci troviamo (32, 33 o 34 per l'Italia) e la fascia (T o S per l'Italia) ripartita, a sua volta, in ulteriori elementi costituiti da quadrati aventi lato di 100 km e distinti da due lettere maiuscole (fig. 6.28).

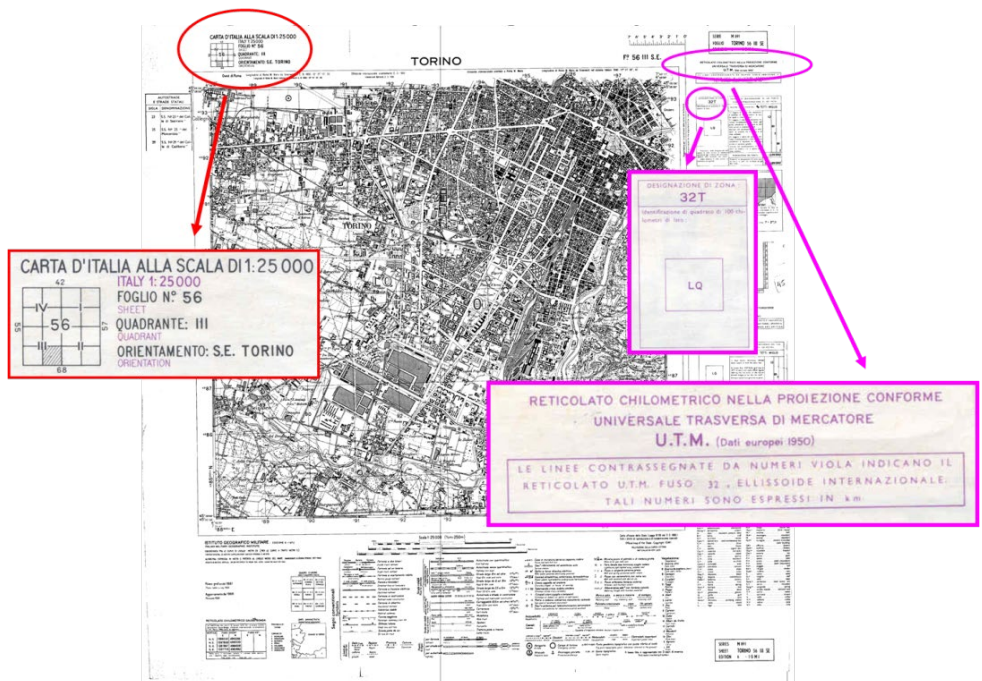


Figura 6.28 – Denominazione tavoletta con indicazione del fuso, fascia e quadrato

È inoltre, riportato:

- il reticolato geografico, con passo di 1', che individua le coordinate geografiche (riferite sia al datum ED50 che al Roma40) rispetto al piano equatoriale e al meridiano passante per Roma Monte Mario (fig. 6.29);

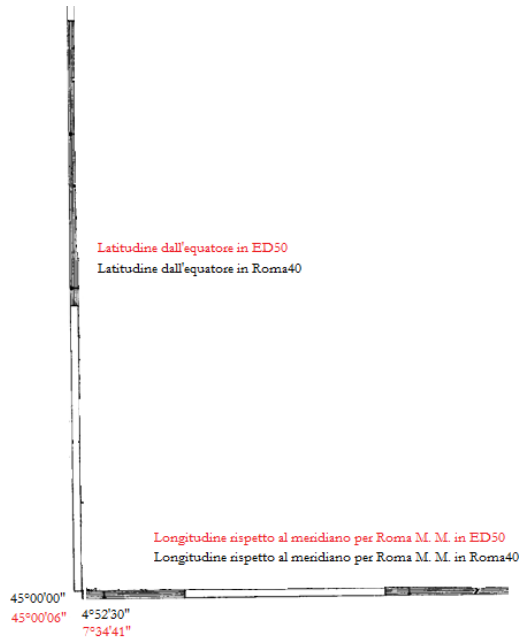


Figura 6.29 – Coordinate geografiche

- il reticolato chilometrico Gauss-Boaga (normalmente non tracciato) riferito all'ellissoide internazionale di Hayford, avente come punto laplaciano M. Mario ed orientato Monte Soratte a Roma; in basso alla carta sono riportate le coordinate Nord ed Est dei vertici (NO, NE, SO, SE) (fig. 6.30);
- il reticolato chilometrico UTM riferito all'ellissoide internazionale di Hayford orientato a Potsdam (Bonn); la coordinata Est esprime, in km, la distanza dal meridiano centrale del fuso di appartenenza, tenendo conto della falsa origine di 500 km; la coordinata Nord esprime la distanza, sempre in km, dall'equatore (fig. 6.31);

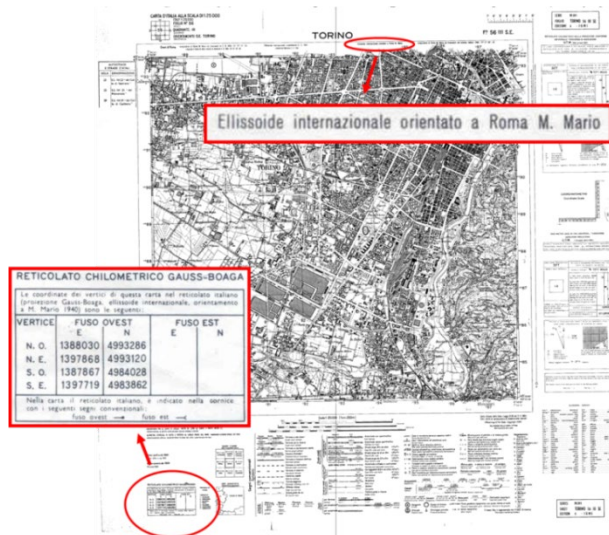


Figura 6.30 – Sistema di rappresentazione Gaus-Boaga

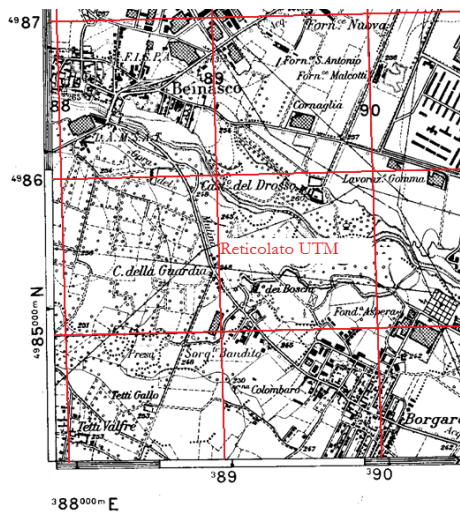


Figura 6.31 – Reticolato UTM

- la declinazione magnetica, che varia da punto a punto e nel tempo, utile quando si utilizza la carta con una bussola e la convergenza del meridiano della carta, γ , rispetto al meridiano centrale (fig. 6.32).

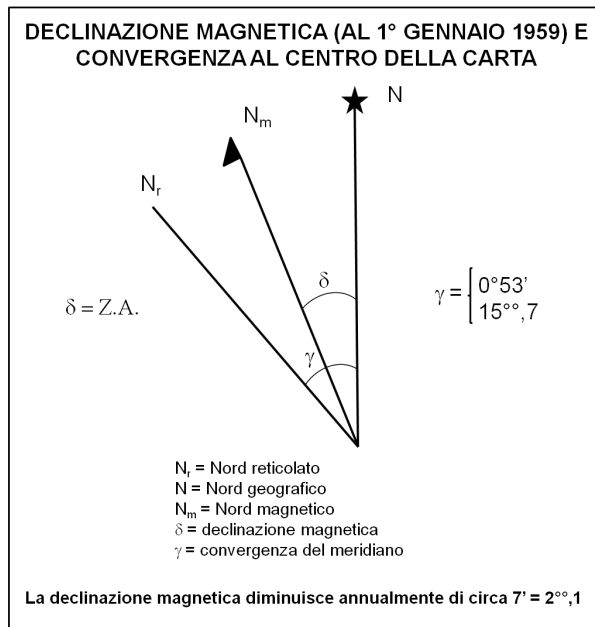


Figura 6.32 – Declinazione magnetica ed angolo di convergenza del meridiano

Per determinare le coordinate di un generico punto, individuato il coordinatometro (fig. 6.33) ed utilizzando una riga, si ricava la distanza del punto rispetto al meridiano immediatamente a sinistra e al parallelo sottostante e si esegue una proporzione.

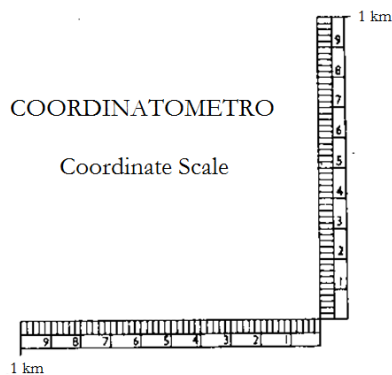


Figura 6.33 – Coordinatometro

Ciascun punto della carta è, inoltre, univocamente individuabile tramite una sigla alfanumerica; ad esempio *32TNR893892* in cui: 32 è il fuso, T la fascia, NR il quadrato di 100 km di lato, 893 la coordinata Est e 892 la coordinata Nord (fig. 6.34).


ESEMPIO DI DESIGNAZIONE DI UN PUNTO CON L'APPROSSIMAZIONE DI 100 METRI			
NOME DEL PUNTO:  TETTI MIGLIO			
1) Leggere le lettere che identificano il quadrato di 100 chilometri di lato nel quale si trova il punto: 2) Leggere il valore del meridiano reticolato immediatamente ad Ovest del punto considerato e registrate le sole cifre scritte in carattere grande: misurare col coordinatometro in ettometri la distanza tra il punto e la linea suddetta: 3) Leggere il valore del parallelo reticolato immediatamente a Sud del punto considerato e registrate le sole cifre scritte in carattere grande: misurare col coordinatometro in ettometri la distanza tra il punto e la linea suddetta:	LQ	89 3	89 2
DESIGNAZIONE DEL PUNTO:	LQ893892		
Preporre la designazione di zona quando si è certi che la stessa sia già ben nota:	32TLQ893892		

Figura 6.34 – Esempio designazione punto

Per confrontare una distanza misurata sulla superficie terrestre con quella letta sulla carta è necessario:

- indicata con D_e la distanza misurata, questa è ridotta alla superficie di riferimento (ellissoidica) con le formule di Briggs o con le formule della degenerazione delle quote medie. La lunghezza della geodetica ottenuta si moltiplica per il modulo di deformazione m e si confronta con la distanza letta sulla carta;
- oppure, si divide la distanza letta sulla carta per il modulo di deformazione m (elementi finiti) e si confronta con la distanza misurata.

Infine, è necessario, ad esempio per il reticolato di Gauss-Boaga, passare dai valori N, E (espressi in km) della carta ad x e y attraverso le seguenti formule:

$$\begin{cases} N = k \cdot x \\ E = (k \cdot y + 1500) \end{cases}$$

nell'ipotesi di trovarci nel Fusso Ovest; se ci trovassimo nel fusso Est è necessario aggiungere 2520.